Mathematik A (EEE) WS 2024/25

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

9. Übungsblatt (11.12.2024)

Beispiel 9.1. Gegeben seien die folgenden Matrizen: **(3 Pkt.)**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob folgende Ausdrücke definiert sind und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

(a) $3A$

(b) $A + 2B$

(c) $C - D$

(d) D^2

(e) E^2

(f) $(DB)^T$

Beispiel 9.2. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix **(2 Pkt.)**

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 9.3. Zeigen Sie, dass es keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gibt für die gilt **(2 Pkt.)**

$$f(2, -1, 5) = (-4, -1), \qquad f(10, 4, -2) = (1, 2), \qquad f(-15, -6, 3) = (-2, 3).$$

Gibt es eine lineare Abbildung, die zumindest zwei der drei gegebenen Bedingungen erfüllt? Wenn ja, geben Sie eine an.

Beispiel 9.4. Sei $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung **(3 Pkt.)**

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y + z - t,\ x + 3z - 3t,\ y + z - t).$$

(a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

(b) Ermitteln Sie eine Matrix A, für die $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ gilt.

(c) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Kerns der Abbildung: $\mathrm{Ker} f := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

(d) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Bildes der Abbildung: $\mathrm{Im} f := \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \text{ es gibt } \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \text{ so dass } f(\vec{x}) = \vec{y}\}$.

Beispiel 9.5. Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem **(3 Pkt.)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(i) keine Lösung, (ii) genau eine Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie im Fall (iii) sämtliche Lösungen.