Formelzettel Mathematik B (ET)

LV-Nr. 503.053, Sommersemester 2020

Kapitel F: Integration I

Grundlegende Integrale:

- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C_1$ oder wahlweise $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\operatorname{arccot}(x) + C_2$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{artanh}(x) + C & \text{für } |x| < 1, \\ \operatorname{arcoth}(x) + C & \text{für } |x| > 1. \end{cases}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arsinh}(x) + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C_1$ oder wahlweise $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos(x) + C_2$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcosh}(x) + C$

Rationale Funktionen:

- Falls $\dfrac{\beta^2}{4} - \gamma < 0$: $\displaystyle\int \frac{b_k x + c_k}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx = \frac{b_k}{2} f_{k-1}(x) + \frac{2c_k - b_k\beta}{2w^{2k-1}} \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy$ mit $w = \sqrt{\gamma - \dfrac{\beta^2}{4}}$, $y = \dfrac{1}{w}\left(x + \dfrac{\beta}{2}\right)$ und $f_{k-1}(x) = \begin{cases} \ln(x^2+\beta x+\gamma) & \text{für } k = 1, \\ -\dfrac{1}{(k-1)(x^2+\beta x+\gamma)^{k-1}} & \text{für } k > 1. \end{cases}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy = \begin{cases} \arctan(y) + C & \text{für } k = 1, \\ -\dfrac{y}{2(k-1)(y^2+1)^{k-1}} + \dfrac{2k-3}{2k-2} \cdot \displaystyle\int \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}\,dy & \text{sonst.} \end{cases}$

Integrale rationaler Funktionen in Sinus und Cosinus:

- Standardsubstitution $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right) \iff x = 2\arctan(u)$
- Dann ist $\sin(x) = \dfrac{2u}{1+u^2}$, $\cos(x) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \dfrac{2}{1+u^2}\,du$

Kapitel F: Integration II

Integralsätze in der Ebene:

- *Gegeben:* Geschlossene Kurve C, die Gebiet B berandet. Auf $B \cup C$ differenzierbares Vektorfeld $\vec{F}$. Parametrisierung $C = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$ durch Bogenlänge, Normalvektor $\vec{n}(s) = \begin{pmatrix} \dot{y}(s) \\ -\dot{x}(s) \end{pmatrix}$.
- **Satz von Gauß:**
$$\iint_B \operatorname{div}(\vec{F})\,dxdy = \oint_C \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle\,ds$$
- **Satz von Stokes:**
$$\iint_B \operatorname{rot}(\vec{F})\,dxdy = \oint_C \vec{F}\,ds$$
- **Greensche Formeln:** f, g auf $B \cup C$ zweimal differenzierbar. Dann:
$$\iint_B \Big(f\Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle\Big)\,dxdy = \oint_C f\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\,ds \qquad \text{(1. Greensche Formel)}$$
$$\iint_B \Big(f\Delta g - g\Delta f\Big)\,dxdy = \oint_C \left(f\frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\right)\,ds \qquad \text{(2. Greensche Formel)}$$
wobei $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ und $\Delta g = g_{xx} + g_{yy}$.

Kapitel I: Differentialgleichungen

- DGL der Form $y' = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$: Substitution $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ $\longrightarrow$ DGL $z' = \dfrac{1}{x}\Big(f(z) - z\Big)$

- DGL der Form $y' = a_1(x)y + a_0(x)$: Spezielle Lösung $y_{\text{sp}} = e^{A(x)} \displaystyle\int \frac{a_0(x)}{e^{A(x)}}\,dx$ mit $A(x) = \int a_1(x)\,dx$

- **Bernoullische DGL** $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$ mit $\alpha \neq 0, 1$:

  Substitution $z = y^{1-\alpha}$ $\longrightarrow$ DGL $z' = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x)$

- **Riccatische DGL** $y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x)$:

  Übliche Ansätze für spezielle Lösung: $y_{\text{sp}} = \alpha x^\beta$, $y_{\text{sp}} = \alpha e^{\beta x}$, $y_{\text{sp}} = \alpha_1 x^{\beta_1} + \alpha_2 x^{\beta_2}$.

  Substitution $v = y - y_{\text{sp}}$ $\longrightarrow$ Bernoullische DGL $v' = \Big(a(x) + 2b(x)y_{\text{sp}}(x)\Big)v + b(x)v^2$

- **Exakte DGL** $A(x,y) + B(x,y)y' = 0$ mit $A_y = B_x$: Allgemeine Lösung $F(x,y) = c \in \mathbb{R}$ mit

$$F(x,y) = \int A(x,y)\,dx + \varphi(y) \qquad \text{wobei} \quad \frac{d}{dy}\left(\int A(x,y)\,dx\right) + \varphi'(y) = B(x,y)$$

oder

$$F(x,y) = \int B(x,y)\,dy + \psi(x) \qquad \text{wobei} \quad \frac{d}{dx}\left(\int B(x,y)\,dy\right) + \psi'(x) = A(x,y)$$

- **Integrierender Faktor** bei DGL $A(x,y) + B(x,y)y' = 0$ mit $A_y \neq B_x$: $\mu(x,y)$ mit $\mu A + \mu B y' = 0$ exakt

  - Falls $\dfrac{A_y - B_x}{B}$ nur von x abhängig: $\mu(x) = \exp\left(\displaystyle\int \frac{A_y - B_x}{B}\,dx\right)$
  - Falls $\dfrac{A_y - B_x}{A}$ nur von y abhängig: $\mu(y) = \exp\left(\displaystyle\int \frac{B_x - A_y}{A}\,dy\right)$

- **Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten** $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(x)$:

  Ansätze für spezielle Lösung:

Typ $b(x)$	Typ Ansatz $y_{\text{sp}}(x)$	λ
$P(x)$	$Q(x) \cdot x^{\mu(\lambda)}$	0
$e^{\alpha x}P(x)$	$e^{\alpha x}Q(x) \cdot x^{\mu(\lambda)}$	α
$P_1(x)\sin(\beta x) + P_2(x)\cos(\beta x)$	$\Big(Q_1(x)\sin(\beta x) + Q_2(x)\cos(\beta x)\Big) \cdot x^{\mu(\lambda)}$	βi
$e^{\alpha x}\Big(a\sin(\beta x) + b\cos(\beta x)\Big)$	$e^{\alpha x}\big(c\sin(\beta x) + d\cos(\beta x)\big) \cdot x^{\mu(\lambda)}$	$\alpha + \beta i$

  Hierbei bezeichnet $\mu(\lambda)$ die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms der zugehörigen homogenen DGL. Die Grade der unbekannten Polynome im Ansatz werden ebenso groß gewählt wie der größte Grad in den entsprechenden Polynomen in $b(x)$.

- **Variation der Konstanten** bei DGL $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$: Spez. Lösung $y_{\text{sp}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ mit $C_1 = -\displaystyle\int \frac{b(x)y_2(x)}{W(x)}\,dx$ und $C_2 = \displaystyle\int \frac{b(x)y_1(x)}{W(x)}\,dx$, wobei y_1, y_2 Fundamentalsystem der homogenen DGL und $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$.

- **Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten** $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$: Ansatz für spezielle Lösung ist

$$\vec{y}_{\text{sp}}(x) = e^{\lambda x}\begin{pmatrix} Q_1(x) \\ \vdots \\ Q_n(x) \end{pmatrix}, \qquad \text{falls} \qquad \vec{b}(x) = e^{\lambda x}\begin{pmatrix} P_1(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \end{pmatrix}.$$

  Dabei sind $Q_1, \ldots, Q_n$ unbekannte Polynome vom Grad $\max\{\deg(P_1), \ldots, \deg(P_n)\} + \mu(\lambda)$