F: Integration

Ober- und Untersummen

Definition

Gegeben: $[a, b] \subset \mathbb{R}$

Zerlegung von $[a, b]$: Menge $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ mit

- $x_0 = a$
- $x_n = b$
- $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$

Spezialfall: äquidistante Zerlegung $x_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$.

Ober- und Untersummen

Definition

Gegeben: $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ Zerlegung von $[a,b]$.
Für $k = 1, \dots, n$:
$m_k := \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad M_k := \sup\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

- Untersumme $U(Z,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$
- Obersumme $O(Z,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$

Ober- und Untersummen

Bemerkung

$U(Z, f) \leq O(Z, f)$

Satz

$\forall$ *Zerlegungen* Z_1, Z_2:

$$U(Z_1, f) \leq O(Z_2, f)$$

Ober- und Untersummen

- $\mathcal{U} := \{U(Z, f) \mid Z \text{ Zerlegung v. } [a, b]\}$
- $\mathcal{O} := \{O(Z, f) \mid Z \text{ Zerlegung v. } [a, b]\}$

Bemerkung

$\sup(\mathcal{U})$, $\inf(\mathcal{O})$ existieren und

$$\sup(\mathcal{U}) \leq \inf(\mathcal{O})$$

Definition

Gegeben: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

- f (Riemann-)integrierbar auf $[a, b]$, falls $\sup(\mathcal{U}) = \inf(\mathcal{O})$
- Falls integrierbar: (Riemann-)Integral von f über $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sup(\mathcal{U}) = \inf(\mathcal{O})$$

- a, b untere/obere Integrationsgrenze

- $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx := 0$

Integrierbare Funktionen

Satz (Riemannsches Integrabilitätskriterium)

$$f \text{ auf } [a,b] \text{ integrierbar}$$

$$\iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \text{ Zerlegung } Z_\varepsilon \text{ mit } O(Z_\varepsilon, f) - U(Z_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

Integrierbare Funktionen

Satz

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *monoton* $\Longrightarrow f$ *auf* $[a, b]$ *integrierbar*

Satz

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig* $\Longrightarrow f$ *auf* $[a, b]$ *integrierbar*

Satz

Gegeben: $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, *nur an endlich vielen Stellen* $f(x) \neq g(x)$

- f *integrierbar* $\Longleftrightarrow g$ *integrierbar*
- *Falls integrierbar:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

Eigenschaften von Integralen

Satz (Zerlegung des Intervalls)

Gegeben: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $a, b, c \in \mathbb{R}$

- f *auf* $[a, c]$ *integrierbar* $\iff$ f *auf* $[a, b]$ *und* $[b, c]$ *integrierbar*
- *Falls integrierbar:*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Satz (Translationsinvarianz)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$$

Eigenschaften von Integralen

Satz (Linearität)

Gegeben: $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar,* $\alpha \in \mathbb{R}$

- $f + g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar und*
$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
- $\alpha f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar und*
$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$

Folgerung

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_a^b f_i(x)\,dx$$

Eigenschaften von Integralen

Satz (Produkt integrierbarer Funktionen)

$f, g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar* $\quad\Longrightarrow\quad$ $f \cdot g$ *auf* $[a,b]$ *integrierbar*

Satz (Monotonie)

Gegeben: $f, g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar*

- *Falls* $\forall x \in [a,b] : f(x) \le g(x)$, *dann* $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$
- *Falls* $\forall x \in [a,b] : f(x) \ge 0$, *dann* $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$
- $\int_a^b f(x)\,dx \le (b-a) \cdot \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$
- $\int_a^b f(x)\,dx \ge (b-a) \cdot \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$

Eigenschaften von Integralen

Satz (Integral und Betrag)

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar* $\quad \Longrightarrow \quad |f|$ *auf* $[a,b]$ *integrierbar und*

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \geq \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$$

Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Gegeben: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig*

- $\exists c \in [a, b]$ *mit*
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b - a)$$
- $\exists \mu$ *mit* $\min\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \leq \mu \leq \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ *und*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu \cdot (b - a)$$

Satz (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Gegeben: $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig*, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar*, $g \geq 0$

- $\exists c \in [a,b]$ *mit*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)\,dx$$

Unbestimmte Integrale

Satz

Gegeben:

- $f\colon I \to \mathbb{R}$ *integrierbar auf jedem* $[a, b] \subseteq I$
- $x_0 \in I$

Dann ist $F\colon I \to \mathbb{R}$ *mit* $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi$ *stetig*

Satz

Gegeben:

- $x_0 \in [a, b]$
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar, stetig in* x_0
- $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *mit* $F(x) := \int_a^x f(\xi)\, d\xi$

Dann ist F *in* x_0 *diff'bar mit* $F'(x_0) = f(x_0)$.

Unbestimmte Integrale

Definition

Gegeben: $f: I \to \mathbb{R}$ stetig

- Stammfunktion von f: $F: I \to \mathbb{R}$ diff'bar mit $F' = f$.

Alternative Sprechweise: F ist unbestimmtes Integral von f

Satz

Gegeben: $f, F: I \to \mathbb{R}$, *f stetig, F Stammfunktion von f*

- $G: I \to \mathbb{R}$ *Stammfunktion von* $f \iff F - G$ *konstant*

Schreibweise: $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$

- F eine Stammfunktion
- C Integrationskonstante

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Gegeben:

- $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig*
- $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *Stammfunktion von* f

Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Bemerkung

Gegeben: Bereich D (kein Intervall)

- Stammfunktion von $f\colon D \to \mathbb{R}$ (stetig) wie zuvor
- Falls F Stammfunktion:
  G Stammfunktion $\iff$ $\forall$ Intervall $I \subset D$: $F - G$ konstant
  (Untersch. Intervalle $\hat{=}$ untersch. Konstanten)
- Hauptsatz der Diff'/Int'rechnung gilt nur, wenn $[a, b] \subset D$

Grundlegende Integrale

- $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1)$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0)$
- $\int e^x \, dx = e^x + C$
- $\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$
- $\int \sinh(x) \, dx = \cosh(x) + C$
- $\int \cosh(x) \, dx = \sinh(x) + C$

Grundlegende Integrale

- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)^2}\,dx = \tan(x) + C \qquad (x \neq n\pi + \tfrac{\pi}{2})$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)^2}\,dx = -\cot(x) + C \qquad (x \neq n\pi)$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh(x)^2}\,dx = \tanh(x) + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh(x)^2}\,dx = -\coth(x) + C \qquad (x \neq 0)$

Grundlegende Integrale

- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C_1 = -\operatorname{arccot}(x) + C_2$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C_1 = -\arccos(x) + C_2 \qquad (|x| < 1)$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arsinh}(x) + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcosh}(x) + C \qquad (|x| > 1)$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{artanh}(x) + C \qquad (|x| < 1)$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{arcoth}(x) + C \qquad (|x| > 1)$