Unbestimmte vs bestimmte Integrale

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Gegeben:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig*
- $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Stammfunktion von* f

Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Schreibweise: $F(x)\Big|_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$

Integrationsmethoden

Linearität von Stammfunktionen

Satz

Gegeben:

- $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ *stetig,*
- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Dann

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx.$$

Partielle Integration

Satz

Gegeben: $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ *stetig diff'bar*

Dann

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Einfacher: Stammfunktion & Grenzen einsetzen

Substitution

Satz

Gegeben:

- $f\colon I \to \mathbb{R}$ *stetig diff'bar,*
- $g\colon f(I) \to \mathbb{R}$ *stetig,*
- G *Stammfunktion von* g.

Dann

$$\int g\big(f(x)\big)f'(x)\,dx = G\big(f(x)\big)$$

Substitution

Schreibweise: $y = f(x) \implies dy = f'(x)\,dx$

- Unbestimmtes Integral:

$$\int g\big(\underbrace{f(x)}_{y}\big)\,\underbrace{f'(x)\,dx}_{dy} = \int g(y)\,dy = \underbrace{G(y) + C = G\big(f(x)\big) + C}_{\text{Rücksubstitution}}$$

- Bestimmtes Integral:
  - Entweder Stammfunktion (mit Rücksubstitution) & Grenzen einsetzen
  - oder Grenzen transformieren

$$\int_a^b g\big(f(x)\big)\,f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$$

Substitution

Folgerung

Gegeben:

- $a \in \mathbb{R}$,
- $g\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ stetig, ungerade

Dann

$$\int_{-a}^{a} g(x)\, dx = 0$$