# Erinnerung: Integrationsmethoden

## Linearität von Stammfunktionen

Gegeben:

- $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ stetig,
- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Dann

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx.$$

# Erinnerung: Integrationsmethoden

## Partielle Integration

Gegeben: $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar

Dann
$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Bestimmtes Integral:
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Einfacher: Stammfunktion & Grenzen einsetzen

# Erinnerung: Integrationsmethoden

## Substitution

Gegeben:

- $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar,
- $g\colon f(I) \to \mathbb{R}$ stetig,
- $G$ Stammfunktion von $g$.

Dann

$$\int g\big(f(x)\big)\,f'(x)\,dx = G\big(f(x)\big)$$

# Substitution

## Bemerkung

- Substitutionsregel $y = f(x) \Longrightarrow dy = f'(x)\,dx$
$$\int g\big(f(x)\big)\,f'(x)\,dx = \int g(y)\,dy$$
- Umgekehrt: $\int g(x)\,dx$ gesucht
    - $x = f(u) \Longrightarrow dx = f'(u)du$
$$\int g(x)\,dx = \int g\big(f(u)\big)\,f'(u)\,du$$

# Substitution – Typische Fälle

## Bemerkung

Gegeben: $f: I \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar

- Falls $f(x) \neq 0$:
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\left|f(x)\right| + C$$
- Falls $f(x) > 0$:
$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + C$$
- Allgemein:
$$\int f(x)f'(x)\,dx = \frac{1}{2}f(x)^2 + C$$

# Integration rationaler Funktionen

## Erinnerung: Partialbruchzerlegung

Rationale Funktion $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ = Summe von

- Polynom
- $\dfrac{a_1}{x-\alpha}, \dfrac{a_2}{(x-\alpha)^2}, \dots, \dfrac{a_n}{(x-\alpha)^n}$ ($\alpha$ $n$-fache Nullst. von $q$)
- $\dfrac{b_1 x + c_1}{x^2+\beta x+\gamma}, \dots, \dfrac{b_n x + c_n}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}$

  (wobei $(x^2+\beta x+\gamma)^n$ Faktor von $q(x)$ ohne reelle Nullstellen)

# Integration rationaler Funktionen

**Typ 1: $\dfrac{a_1}{x-\alpha}$**

$$\int \frac{a_1}{x-\alpha}\,dx = a_1 \ln|x-\alpha| + C$$

**Typ 2: $\dfrac{a_k}{(x-\alpha)^k}$ mit $k \geq 2$**

$$\int \frac{a_k}{(x-\alpha)^k}\,dx = -\frac{a_k}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} + C$$

# Integration rationaler Funktionen

**Typ 3:** $\dfrac{b_k x + c_k}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k}$ mit $\dfrac{\beta^2}{4} - \gamma < 0$

$$\int \frac{b_k x + c_k}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k}\,dx = \frac{b_k}{2} f_{k-1}(x) + \frac{2c_k - b_k\beta}{2w^{2k-1}} \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy$$

mit $w = \sqrt{\gamma - \dfrac{\beta^2}{4}}$ und $y = \dfrac{1}{w}\left(x + \dfrac{\beta}{2}\right)$ und

$$f_{k-1}(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + \beta x + \gamma) & \text{für } k = 1, \\ -\dfrac{1}{(k-1)(x^2 + \beta x + \gamma)^{k-1}} & \text{für } k > 1. \end{cases}$$

$$I_k := \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy$$

- $I_1 = \arctan(y) + C$
- $I_k = -\dfrac{y}{2(k-1)(y^2+1)^{k-1}} + \dfrac{2k-3}{2k-2} \cdot I_{k-1} \qquad \text{für } k \geq 2$

# Integration rationaler Funktionen in Sinus und Cosinus

Gegeben: Rationale Funktion in Sinus und Cosinus

z.B. $f(x) = \dfrac{2\sin(x) - \cos(x)^3 + 5}{\sin(x)^3\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x)^5}$

## Standardsubstitution für sin, cos

$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \iff x = 2\arctan(u)$

Dann:

- $\sin(x) = \dfrac{2u}{1+u^2}$
- $\cos(x) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$
- $dx = \dfrac{2}{1+u^2}\,du$