Erinnerung: Integration rationaler Funktionen

Typ 1: $\dfrac{a_1}{x-\alpha}$

$$\int \frac{a_1}{x-\alpha}\,dx = a_1 \ln|x-\alpha| + C$$

Typ 2: $\dfrac{a_k}{(x-\alpha)^k}$ mit $k \geq 2$

$$\int \frac{a_k}{(x-\alpha)^k}\,dx = -\frac{a_k}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} + C$$

Erinnerung: Integration rationaler Funktionen

Typ 3: $\dfrac{b_k x + c_k}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k}$ mit $\dfrac{\beta^2}{4} - \gamma < 0$

$$\int \frac{b_k x + c_k}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k}\,dx = \frac{b_k}{2} f_{k-1}(x) + \frac{2c_k - b_k\beta}{2w^{2k-1}} \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy$$

mit $w = \sqrt{\gamma - \dfrac{\beta^2}{4}}$ und $y = \dfrac{1}{w}\left(x + \dfrac{\beta}{2}\right)$ und

$$f_{k-1}(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + \beta x + \gamma) & \text{für } k = 1, \\ -\dfrac{1}{(k-1)(x^2 + \beta x + \gamma)^{k-1}} & \text{für } k > 1. \end{cases}$$

Beispiel

$$\int \frac{2x^2 + 11x + 20}{x^2 + 4x + 8}\, dx = \int 2 + \frac{3x + 4}{x^2 + 4x + 8}\, dx$$

Fall $\dfrac{b_1 x + c_1}{x^2 + \beta x + \gamma}$ mit $b_1 = 3,\ c_1 = 4,\ \beta = 4,\ \gamma = 8$ und $\frac{\beta^2}{4} - \gamma = -4 < 0$.

$$\Longrightarrow \qquad w = \sqrt{\gamma - \frac{\beta^2}{4}} = 2 \ \text{ und } \ y = \frac{1}{w}\left(x + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{x+2}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 11x + 20}{x^2 + 4x + 8}\, dx &= \frac{b_1}{2} \ln(x^2 + \beta x + \gamma) + \frac{2c_k - b_k\beta}{2w} \int \frac{1}{y^2+1}\, dy \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2 + 4x + 8) - \arctan\left(\frac{x+2}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

Erinnerung: Integration rationaler Funktionen in Sinus und Cosinus

Gegeben: Rationale Funktion in Sinus und Cosinus

Standardsubstitution für sin, cos

$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \iff x = 2\arctan(u)$

Dann:

- $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$
- $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$
- $dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$

Beispiel 1

$$\int \frac{1}{1+\sin(x)}\,dx \qquad \text{für } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Substitution $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$ und $dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sin(x)}\,dx &= \int \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du \\
&= \int \frac{2}{1+u^2+2u}\,du \\
&= \int \frac{2}{(u+1)^2}\,du \\
&= -\frac{2}{u+1} + C
\end{aligned}$$

Beispiel 2

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\,dx \qquad \text{für } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Substitution $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\,dx &= \int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du \\ &= \int \frac{2-2u^2}{(u+1)^2(1+u^2)}\,du\end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Partialbruchzerlegung (längere Rechnung)

Beispiel 2

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\,dx \qquad \text{für } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Substitution $y = \sin(x) \quad \Longrightarrow \quad dy = \cos(x)\,dx$

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\,dx = \int \frac{1}{1+y}\,dy = \ln|1+y| + C = \ln|1+\sin(x)| + C$$

Warnung

Standardsubstitution nicht immer am einfachsten!

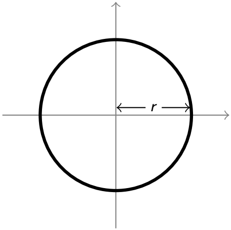
Mehrdimensionale Kurven

Mehrdimensionale Kurven

Definition

Gegeben: Intervall I, stetige Funktionen $x_1, \ldots, x_d : I \to \mathbb{R}$.

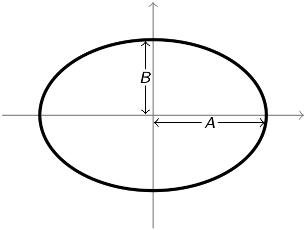
- Kurve in Parameterdarstellung $\vec{x}\colon I \to \mathbb{R}^d$, $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_d(t) \end{pmatrix}$
- Falls $I = [a, b]$: $\vec{x}(a)$ und $\vec{x}(b)$ Anfangs-/Endpunkt
- Implizite Darstellung $:=$ Gleichung ohne Parameter t



Kreis: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$

$I = [0, 2\pi]$

Implizit: $x_1^2 + x_2^2 = r^2$



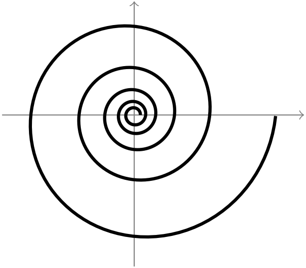
Ellipse: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} A\cos(t) \\ B\sin(t) \end{pmatrix}$

$I = [0, 2\pi]$

Implizit: $\dfrac{x_1^2}{A^2} + \dfrac{x_2^2}{B^2} = 1$

Beispiel: Gerade und logarithmische Spirale

Gerade: $\vec{x}(t) = \vec{p} + t\vec{r}, \quad I = \mathbb{R}$



Logarithmische Spirale:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{\nu t}\cos(t) \\ e^{\nu t}\sin(t) \end{pmatrix}$$

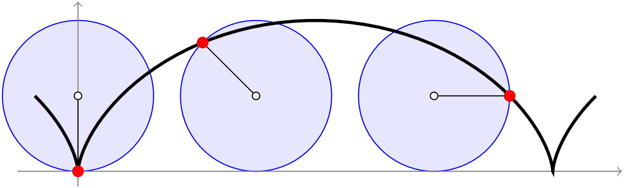
$$I = \mathbb{R}$$

Polarkoordinaten:

$t = \varphi$, $r(\varphi) = e^{\nu\varphi}$

Beispiel: Zykloide

Zykloide: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r(t - \sin(t)) \\ r(1 - \cos(t)) \end{pmatrix}, \qquad I = \mathbb{R}$

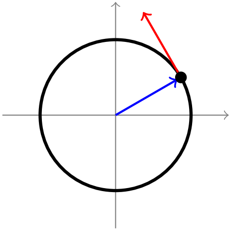


$t = 0$ $\qquad t = \frac{3\pi}{4}$ $\qquad t = \frac{3\pi}{2}$

Gegeben: Kurve $\vec{x}(t)$

- $\vec{x}(t)$ differenzierbar $\quad :\Longleftrightarrow \quad x_1, \ldots, x_d$ diff'bar
- Tangentenvektor $\dot{\vec{x}}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t_0) \\ \vdots \\ \dot{x}_d(t_0) \end{pmatrix}$
- $\vec{x}(t)$ glatt $\quad :\Longleftrightarrow \quad x_1, \ldots, x_d$ stetig diff'bar
- $\vec{x}(t)$ stückweise glatt $\quad :\Longleftrightarrow$
  - $x_1, \ldots, x_d$ stetig diff'bar bis auf endlich viele Stellen $t_1, \ldots, t_n$
  - Einseitige Ableitungen in $t_1, \ldots, t_n$ existieren

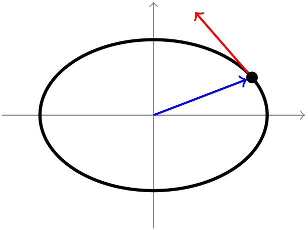
Beispiel: Kreis und Ellipse



Kreis: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$

$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix}$

$\vec{x}$ und $\dot{\vec{x}}$ orthogonal

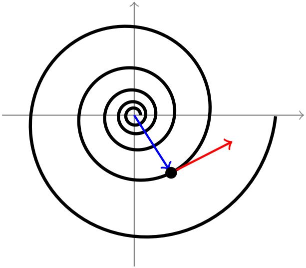


Ellipse: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} A\cos(t) \\ B\sin(t) \end{pmatrix}$

$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -A\sin(t) \\ B\cos(t) \end{pmatrix}$

Beispiel: Gerade und logarithmische Spirale

$$\text{Gerade:}\quad \vec{x}(t) = \vec{p} + t\vec{r}$$
$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{r}$$



Logarithmische Spirale:

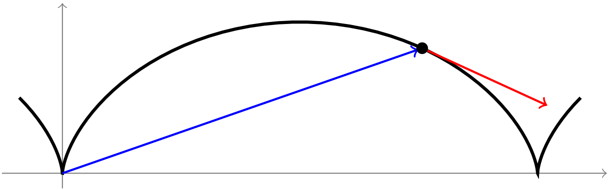
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{\nu t}\cos(t) \\ e^{\nu t}\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} e^{\nu t}\big(\nu\cos(t) - \sin(t)\big) \\ e^{\nu t}\big(\nu\sin(t) + \cos(t)\big) \end{pmatrix}$$

Beispiel: Zykloide

Zykloide: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r(t - \sin(t)) \\ r(1 - \cos(t)) \end{pmatrix}$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} r(1 - \cos(t)) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$$



Bogenlänge

Gegeben: Glatte Kurve $\vec{x}(t)$

- $\vec{x}(t) \quad \hat{=} \quad$ Ortsvektor
- $\dot{\vec{x}}(t) \quad \hat{=} \quad$ Geschwindigkeitsvektor
- $\left\|\dot{\vec{x}}(t)\right\| \quad \hat{=} \quad$ Geschwindigkeit

  $= \quad$ Ableitung der zurückgelegten Strecke
- Für $I = [a, b]$: Bogenlänge

$$L = \int_a^b \left\|\dot{\vec{x}}(t)\right\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \cdots + \dot{x}_d(t)^2} \, dt$$

- Analog für stückweise glatt (Aufteilen von I)

Beispiele

- Kreis: $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix} \implies \left\| \dot{\vec{x}}(t) \right\| = r$

$$L = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r$$

- Ellipse: $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -A\sin(t) \\ B\cos(t) \end{pmatrix} \implies \left\| \dot{\vec{x}}(t) \right\| = \sqrt{A^2\sin(t)^2 + B^2\cos(t)^2}$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{A^2\sin(t)^2 + B^2\cos(t)^2}\,dt$$

Nicht exakt berechenbar! $\longrightarrow$ Numerische Integration

- Gerade: $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{r} \implies \left\| \dot{\vec{x}}(t) \right\| = \|\vec{r}\|$

$$L = \int_a^b \|\vec{r}\|\,dt = \|\vec{r}\| \cdot (b-a)$$

Spezialfälle

Polarkoordinaten

Gegeben: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos(\varphi(t)) \\ r(t)\sin(\varphi(t)) \end{pmatrix}$

$$\implies \quad L = \int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \varphi'(t)^2}\, dt$$

Funktionsgraph

Gegeben: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \quad \implies \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$

Parameterwechsel

Gegeben: Kurve $\vec{x}(t)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$

- $g\colon I \to [a,b]$ bijektiv, diff'bar
- $\vec{x}(g(\tau))\colon I \to \mathbb{R}^d$ Parameterdarstellung gleicher Kurve
- $g' > 0 \quad \hat{=} \quad$ gleiche Durchlaufrichtung
- $g' < 0 \quad \hat{=} \quad$ umgekehrte Durchlaufrichtung
- Bogenlänge unverändert

Parameterwechsel

Gegeben: Kurve $\vec{x}(t)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$

- Bogenlänge bis Zeitpunkt $t \in [a,b]$

$$s(t) = \int_a^t \left\| \dot{\vec{x}}(u) \right\| \, du$$

- $s\colon [a,b] \to [0,L]$ bijektiv, diff'bar $\quad\longrightarrow\quad$ Umkehrfunktion $t(s)$
- $\vec{y}(s) = \vec{x}(t(s))\colon [0,L] \to \mathbb{R}^d$ natürliche Parametrisierung von $\vec{x}$
- $\dfrac{d\vec{y}}{ds} = \dfrac{\dot{\vec{x}}(t(s))}{\left\|\dot{\vec{x}}(t(s))\right\|}$
- Richtung wie Tangentenvektor, Länge 1

Beispiel

Schraubenlinie

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ ht \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left\|\dot{\vec{x}}(t)\right\| = \left\| \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ h \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{r^2 + h^2}\, du = \sqrt{r^2 + h^2} \cdot t$$

$$\vec{y}(s) = \begin{pmatrix} r\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\right) \\ r\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}\right) \\ \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} \cdot s \end{pmatrix}$$