Numerische Integration

Erinnerung: Bogenlänge von Ellipsen

Ellipse $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} A\cos(t) \\ B\sin(t) \end{pmatrix}$ hat Bogenlänge

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{A^2 \sin(t)^2 + B^2 \cos(t)^2}\, dt.$$

Integral nicht exakt berechenbar!

Numerische Integration: Problemstellung

Gegeben:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar
- Stammfunktion nicht berechenbar

Gesucht: Näherung für $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Idee:

- Nähere $f(x)$ durch Polynom $p(x)$ an
- Berechne $\displaystyle\int_a^b p(x)\,dx$

Interpolation durch Polynome

Gegeben: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar

- Zerlege $[a, b]$ in Intervalle der Länge $h = \frac{b-a}{n}$:
  Zerlegung $\{x_0, \ldots, x_n\}$ mit $x_k = a + kh$:
- Lagrange-Polynome
  $$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \quad \Longrightarrow \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
- $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$ erfüllt $p_n(x_j) = f(x_j)$ für alle j
- $\int_a^b p_n(x)\, dx = h \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \alpha_i \quad$ mit $\quad \alpha_i = \int_0^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{s-k}{i-k}\, ds$

Newton-Côtes Formeln

Gegeben: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar

- $\int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\alpha_i \quad$ mit $\quad \alpha_i = \int_0^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{s-k}{i-k}\,ds$
- Für alle n gibt es K, p (unabhängig von f) mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = h \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\alpha_i - K\,h^{p+1}\,f^{(p)}(\hat{x})$$

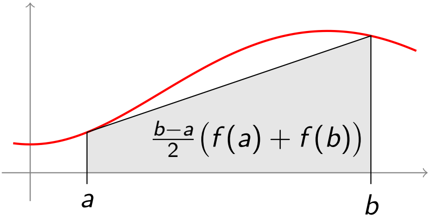
für ein $\hat{x} \in (a, b)$ (falls f genügend oft diff'bar)

Newton-Côtes Formeln

Trapezregel ($n = 1$)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$$

Fehler: $\frac{1}{12} h^3 f''(\hat{x})$



Newton-Côtes Formeln

Simpsonregel ($n = 2$)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$\text{Fehler: } \frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\hat{x})$$

$\frac{3}{8}$-Regel ($n = 3$)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right)$$

$$\text{Fehler: } \frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\hat{x})$$

Newton-Côtes Formeln

Milne-Regel ($n = 4$)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{90}\left(7f(a) + 32f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 12f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right.$$
$$\left. + 32f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + 7f(b)\right)$$

Fehler: $\frac{8}{945}h^7 f^{(6)}(\hat{x})$

Newton-Côtes Formeln

6-Punkt-Regel ($n = 5$)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{288}\left(19f(a) + 75f\left(\frac{4a+b}{5}\right) + 50f\left(\frac{3a+2b}{5}\right)\right.$$
$$\left. + 50f\left(\frac{2a+3b}{5}\right) + 75f\left(\frac{a+4b}{5}\right) + 19f(b)\right)$$

Fehler: $\frac{275}{12096} h^7 f^{(6)}(\hat{x})$

Newton-Côtes Formeln

Weddle-Regel ($n = 6$)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{840}\left(41f(a) + 216f\left(\frac{5a+b}{6}\right) + 27f\left(\frac{2a+b}{3}\right)\right.$$
$$+ 272f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 27f\left(\frac{a+2b}{3}\right)$$
$$\left. + 216f\left(\frac{a+5b}{6}\right) + 41f(b)\right)$$

Fehler: $\dfrac{9}{1400}h^9 f^{(8)}(\hat{x})$

Newton-Côtes Formeln

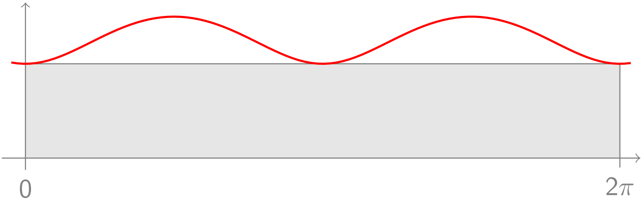
Bemerkung

Für $n \geq 7$:

- manche α_i negativ
- Fehlerfortpflanzung $\Longrightarrow$ numerisch unbrauchbar

Beispiel

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin(t)^2 + 4\cos(t)^2}\, dt \approx 15{,}86544$$



Beispiel

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin(t)^2 + 4\cos(t)^2}\, dt \approx 15{,}86544$$

- Trapezregel: 12,56637
- Simpsonregel: 12,56637
- $\frac{3}{8}$-Regel: 16,26033
- Milne-Regel: 17,03441
- 6-Punkt-Regel: 16,43275
- Weddle-Regel: 13,82425

Verbesserung der Approximation

Strategie

- Zerlege Intervall in gleichlange Teilintervalle $I_1, \dots, I_k$
- Wende Newton-Côtes auf jedem I_j an

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin(t)^2 + 4\cos(t)^2}\, dt \approx 15{,}86544$$

- $k = 4$ & Trapezregel: 15,70796
- $k = 4$ & Simpsonregel: 15,91535

Gleichmäßige Konvergenz und Integrale

Erinnerung: Gleichmäßige Konvergenz

Gegeben: $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$

Definition

(f_n) konvergiert punktweise gegen f

$$:\Longleftrightarrow$$

Für jedes $x \in [a,b]$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall x \in [a,b], \varepsilon > 0$ gibt es $N_{x,\varepsilon}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_{x,\varepsilon}$

Definition

(f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f

$$:\Longleftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0$ gibt es N_ε mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a,b], n \geq N_\varepsilon$

Gleichmäßige Konvergenz und Integrale

Gegeben:

- $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $n = 1, 2, \ldots$
- $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ gleichmäßig

Bekannt:

- Falls alle f_n stetig, dann f stetig
- Deshalb f integrierbar
- $$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| &\le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \\ &\le (b-a)\sup\{|f_n(x) - f(x)|\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$
- $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Gleichmäßige Konvergenz und Integrale

Satz

Gegeben:

- $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar,* $n = 1, 2, \ldots$
- $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ *gleichmäßig*

Dann:

- f *integrierbar*
- $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Beispiel 1

$$f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{nx}{x^2+n^2}$$

- $0 \le f_n(x) < \dfrac{n \cdot 1}{0^2+n^2} = \dfrac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
- $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f = 0$ gleichmäßig

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{nx}{x^2+n^2}\,dx &= \frac{n}{2}\left[\ln\left(x^2+n^2\right)\right]_0^1 & \color{blue}{\left(2x = (x^2+n^2)'\right)} \\ &= \frac{n}{2}\left(\ln(n^2+1) - \ln(n^2)\right) \\ &= \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int_0^1 0\,dx = 0 \end{aligned}$$

Beispiel 2

$f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$

- $f_n(1) = 1$ für alle n
- $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für $x < 1$
- punktweise: $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- nicht gleichmäßig (f_n stetig, f nicht stetig)

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n \, dx &= \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int_0^1 f(x)\, dx = 0 \end{aligned}$$

Gleichmäßige Konvergenz und Integrale

Satz

Gegeben:

- $f_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar,* $n = 1, 2, \ldots$
- $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ *gleichmäßig*

Dann:

- f *integrierbar*
- $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Bemerkung

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

kann (aber muss nicht) auch schon gelten, falls $f_n \to f$ punktweise

Beispiel 3

$f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = n^2(1-x)x^n$

- $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f = 0$ punktweise
- $f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = n \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}_{\to e^{-1}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$
- daher nicht gleichmäßig

$$\begin{aligned}\int_0^1 n^2(1-x)x^n\,dx &= n^2\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 \\ &= \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad \neq \quad \int_0^1 f(x)\,dx = 0\end{aligned}$$

Fourierreihen

Definition

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-periodisch ($T > 0$), falls

$$f(x + T) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Hier: 2π-periodisch
- f T-periodisch $\quad\Longrightarrow\quad f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ 2π-periodisch
- Linearkombinationen von $\sin(x), \sin(2x), \sin(3x), \ldots$ und $\cos(x), \cos(2x), \cos(3x), \ldots$ sind 2π-periodisch

Fourierreihen

Definition

Fourierreihe: Punktweise konvergente Reihe

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big)$$

Frage

Gegeben: 2π-periodische Funktion $f(x)$

- Lässt sich f als Fourierreihe schreiben?
- Wie bestimmt man die Koeffizienten?