# Erinnerung: Fourierreihen

## Definition

Fourierreihe: Punktweise konvergente Reihe

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big)$$

## Frage

Gegeben: $2\pi$-periodische Funktion $f(x)$

- Lässt sich $f$ als Fourierreihe schreiben?
- Wie bestimmt man die Koeffizienten?

# Orthogonalität von sin und cos

Gegeben: $m, n \in \mathbb{N}_0$

- $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & m = n = 0, \\ \pi & m = n \neq 0, \\ 0 & m \neq n. \end{cases}$$
- $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 2\pi & m = n = 0, \\ \pi & m = n \neq 0, \\ 0 & m \neq n. \end{cases}$$
- $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0$$

Annahme: $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big)$ (gleichm. Konv.)

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx \;&=\; \frac{1}{2}a_0\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\,dx}_{=2\pi,\text{ falls } m=0} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(a_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,dx}_{=\pi,\text{ falls } m=n} \\
&\qquad + b_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\sin(nx)\,dx}_{=0}\Bigg) \\
&=\; a_m\pi
\end{aligned}$$

Analog:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx = b_m\pi$$

### Folgerung

Bei gleichmäßiger Konvergenz gilt

- $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad (n \geq 0)$
- $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \qquad (n \geq 1)$

# Fourierreihen

## Definition

Gegeben: $f$ $2\pi$-periodisch, auf $[-\pi,\pi]$ integrierbar

- Fourierkoeffizienten: $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad (n \geq 0)$

  und $\quad b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \qquad (n \geq 1)$

- Fourierreihe von $f$: $\dfrac{1}{2}a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big)$

## Bemerkung

- $f$ gerade $\Longrightarrow$ $b_n = 0$ für alle $n$
- $f$ ungerade $\Longrightarrow$ $a_n = 0$ für alle $n$

## Frage

- Ist Fourierreihe (gleichm.) konvergent?
- Stimmt Fourierreihe mit $f(x)$ überein?

# Fourierreihen

## Satz

*Gegeben:* $f$ $2\pi$*-periodisch mit*

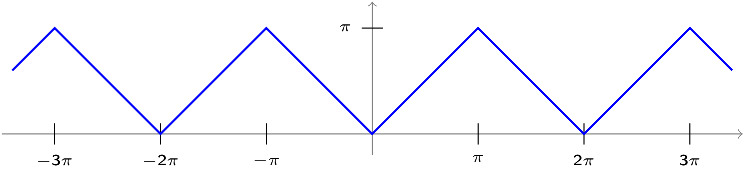
- $f$ *auf* $[-\pi, \pi]$ *stetig diff'bar bis auf endlich viele Punkte*
- *überall sonst:* $f(x^-), f(x^+)$ *und* $f'(x^-), f'(x^+)$ *existieren*

*Dann:*

- *Fourierreihe* $\xrightarrow{\text{punktweise}}$ $\bar{f}(x) = \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$
- *Falls $f$ stetig:* *Fourierreihe* $\xrightarrow{\text{gleichmäßig}}$ $f(x)$

# Beispiel 1

$f(x) = |x|$ auf $(-\pi, \pi]$, periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt




- $f$ gerade $\quad\Longrightarrow\quad b_n = 0$
- $a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{0}^{\pi} x \cos(nx)\, dx$
- $a_0 = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{0}^{\pi} x\, dx = \dfrac{1}{\pi} x^2 \Big|_0^{\pi} = \pi$

# Beispiel 1

$n \geq 1$: Partielle Integration:

$$g(x) = x,\ h'(x) = \cos(nx) \quad \Longrightarrow \quad g'(x) = 1,\ h(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$$

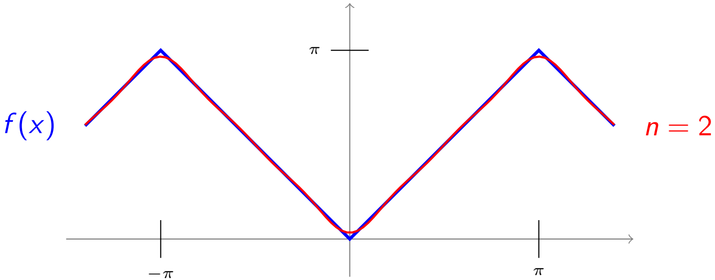
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin(nx)\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left((0-0) + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\Big|_0^\pi\,dx\right) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Fourierreihe:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\left((2k+1)x\right)}{(2k+1)^2}$$

# Beispiel 1

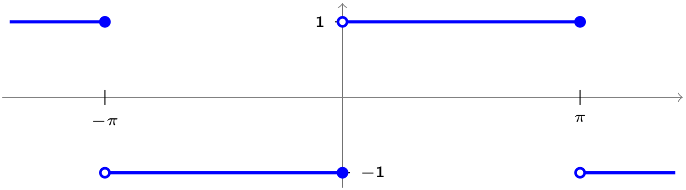
Weil $f$ stetig: Gleichm. Konv. $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left((2k+1)x\right)}{(2k+1)^2}$




$f(x)$ vs. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos\left((2k+1)x\right)}{(2k+1)^2}$

# Beispiel 2

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x \leq \pi, \\ -1 & \text{für } -\pi < x \leq 0, \end{cases} \qquad \text{periodisch fortgesetzt}$$




- $f$ auf $[-\pi, \pi]$ bis auf endlich viele Punkte ungerade $\implies$ $a_n = 0$
- $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx = -\frac{2}{\pi n} \cos(nx)\Big|_0^{\pi}$
- $b_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade}, \\ \frac{4}{\pi n} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$

# Beispiel 2

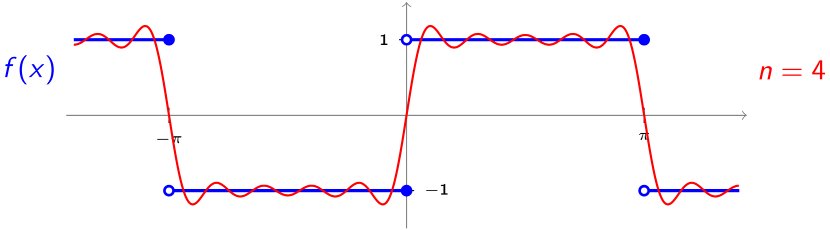
Fourierreihe:

$$F(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\big((2k+1)x\big)}{2k+1}$$

- $f(x)$ stetig diff'bar für $x \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$
- Dort $\quad F(x) \xrightarrow{\text{punktweise}} f(x)$
- Für $x \in \pi \cdot \mathbb{Z}$: $\quad F(x) \xrightarrow{\text{punktweise}} \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = 0$
- $F(x) \xrightarrow{\text{punktweise}} g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \notin \pi \cdot \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{für } x \in \pi \cdot \mathbb{Z} \end{cases}$

# Beispiel 2

$$f(x) \quad \text{vs.} \quad \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left((2k+1)x\right)}{2k+1}$$



# Uneigentliche Integrale

# Erinnerung: Integrierbare Funktionen

## Bestimmte Integrale

Integral nur definiert für

- endliches Intervall $I = [a, b]$
- beschränkte Funktion $f(x)$

## Frage

Integrale für

- unbeschränktes $I$,
- unbeschränktes $f(x)$?

# Typ 1: Unbeschränktes Intervall

## Definition

Gegeben: $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$

- $f$ lokal integrierbar $\quad :\Longleftrightarrow \quad f$ int'bar auf $[a,b]$ für alle $b \geq a$
- Falls $f$ lokal int'bar:
  $$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ konvergent} \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \text{ existiert}$$
- Dann $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

- Analog für $f\colon (-\infty,b] \to \mathbb{R}$ (Grenzwert für $a \to -\infty$)
- Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
  - lokal int'bar auf $\mathbb{R}$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad$ lokal int'bar auf $(-\infty,0]$ und auf $[0,\infty)$
  - $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ konv. $\quad :\Longleftrightarrow \quad \displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ und $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ konv.

## Bemerkung

Gegeben: $f$ stetig

- $f$ lokal integrierbar

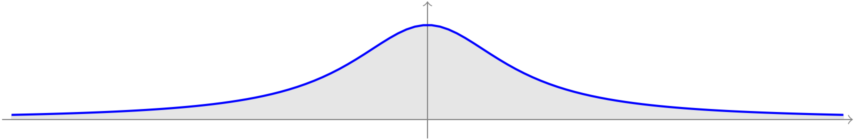
Falls $F$ Stammfunktion:

- $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a)$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \Big(\lim_{x\to\infty} F(x)\Big) - \Big(\lim_{x\to-\infty} F(x)\Big)$ (separate GW!)

# Beispiel 1

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- $f$ lokal int'bar auf $\mathbb{R}$
- Stammfunktion $F(x) = \arctan(x)$
- $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big(\lim_{x\to\infty} \arctan(x)\Big) - \Big(\lim_{x\to-\infty} \arctan(x)\Big)$$
  $$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

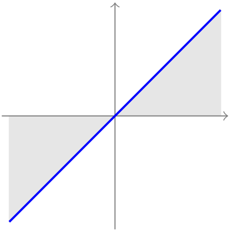


Fläche $= \pi$

# Beispiel 2

$f(x) = x$

- $f$ lokal int'bar auf $\mathbb{R}$
- Stammfunktion $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2$
- $\left(\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2}x^2\right) = \infty \qquad$ (ebenso für $x \to -\infty$)
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ existiert nicht



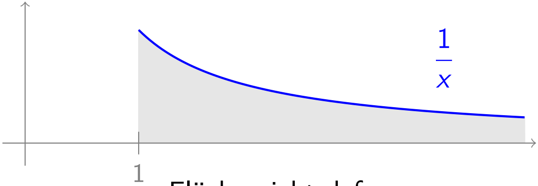
Fläche nicht def.

# Beispiel 3

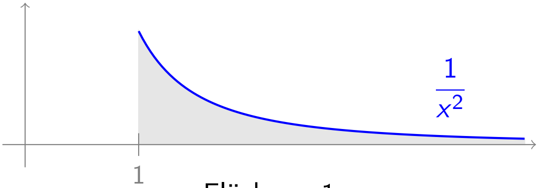
$f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0)$

- $f$ lokal int'bar auf $[1,\infty)$
- Stammfunktion $F(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{für } \alpha = 1, \\ \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} & \text{sonst} \end{cases}$
- $\alpha \le 1$: $\quad \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ divergiert
- $\alpha > 1$: $\quad \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = 0 - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$

# Beispiel 3




Fläche nicht def.




Fläche $= 1$

# Beispiel 4

Gegeben:

- Stromleiter, Stromstärke $I$, Länge $\infty$
- Punkt $P$, Abstand $a$ von Leiter
- Magnetisches Feld bei $P$ hat Stärke $H = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{(a^2+x^2)^{3/2}}\, dx$

Frage: Konvergiert $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{(a^2+x^2)^{3/2}}\, dx$?

- $\frac{a}{(a^2+x^2)^{3/2}}$ gerade
- Falls konvergent: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{(a^2+x^2)^{3/2}}\, dx = 2 \int_{0}^{\infty} \frac{a}{(a^2+x^2)^{3/2}}\, dx$

# Beispiel 4

Substitution $x = a\sinh(u) \quad \Longrightarrow \quad dx = a\cosh(u)\,du$

$$(a^2 + x^2)^{3/2} = \Big(a^2 \underbrace{\left(1 + \sinh(u)^2\right)}_{=\cosh(u)^2}\Big)^{3/2} = a^3\cosh(u)^3$$

$$\int \frac{a}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,dx = \int \frac{a^2\cosh(u)}{a^3\cosh(u)^3}\,du = \int \frac{1}{a\cosh(u)^2}\,du$$

$$= \frac{1}{a}\tanh(u) + C = \frac{1}{a}\tanh\left(\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right)\right) + C$$

$$\int_0^\infty \frac{a}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,dx = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{a}\tanh\left(\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right)\right) - \frac{1}{a}\tanh\left(\operatorname{arsinh}(0)\right)$$

$$= \frac{1}{a}$$

# Beispiel 4

Magnetische Feldstärke $H = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \, dx = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{2}{a} = \frac{I}{2\pi a}$