Uneigentliche Integrale

Typ 1: Unbeschränktes Intervall

Definition

Gegeben: $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$

- f lokal integrierbar $\quad :\Longleftrightarrow \quad f$ int'bar auf $[a,b]$ für alle $b \geq a$
- Falls f lokal int'bar:
  $$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ konvergent} \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \text{ existiert}$$
- Dann $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

- Analog für $f\colon (-\infty,b] \to \mathbb{R}$ (Grenzwert für $a \to -\infty$)
- Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
  - lokal int'bar auf $\mathbb{R}$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad$ lokal int'bar auf $(-\infty,0]$ und auf $[0,\infty)$
  - $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ konv. $\quad :\Longleftrightarrow \quad \displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ und $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ konv.

Konvergenzkriterien

Satz

Gegeben: $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *lokal integrierbar*

- *Gilt* $f \geq 0$ *und* $M := \sup \left\{ \int_a^b f(x)\,dx \;\middle|\; b \geq a \right\} < \infty$, *dann konvergiert* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *mit* $\int_a^\infty f(x)\,dx = M$
- *Konvergiert* $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$, *dann konvergiert auch* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *und* $\left| \int_a^\infty f(x)\,dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)|\,dx$

Analog für $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ *oder* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Konvergenzkriterien

- Gilt $f \geq 0$ und $M := \sup \left\{ \int_a^b f(x)\,dx \;\middle|\; b \geq a \right\} < \infty$, dann konvergiert $\int_a^\infty f(x)\,dx$ mit $\int_a^\infty f(x)\,dx = M$
- Beweis: $I(b) := \int_a^b f(x)\,dx$ monoton steigend, weil $f \geq 0$. Also $\lim_{b\to\infty} I(b) = \sup\{I(b) \mid b \geq a\} = M$.

Konvergenzkriterien

- Konvergiert $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$, dann konvergiert auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$ und $\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right| \leq \int_a^\infty |f(x)|\,dx$
- Beweis: $g(x) := f(x) + |f(x)| = \begin{cases} 0 & \text{für } f(x) < 0, \\ 2|f(x)| & \text{sonst} \end{cases}$
  - g lokal int'bar und $g \geq 0$
  - $\sup\left\{\int_a^b g(x)\,dx \;\middle|\; b \geq a\right\} \leq 2\sup\left\{\int_a^b |f(x)|\,dx \;\middle|\; b \geq a\right\} < \infty$
  - $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergiert und $0 \leq \int_a^\infty g(x)\,dx \leq 2\int_a^\infty |f(x)|\,dx$
  - $\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^\infty g(x)\,dx - \int_a^\infty |f(x)|\,dx$ konvergiert und $-\int_a^\infty |f(x)|\,dx \leq \int_a^\infty f(x)\,dx \leq \int_a^\infty |f(x)|\,dx$

Konvergenzkriterien

Satz (Vergleichskriterium)

Gegeben: $f, g \colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *lokal int'bar*

- *Falls* $|f| \leq g$ *und* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *konvergent, dann konvergiert auch* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *und*

$$\left| \int_a^\infty f(x)\,dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)|\,dx \leq \int_a^\infty g(x)\,dx$$

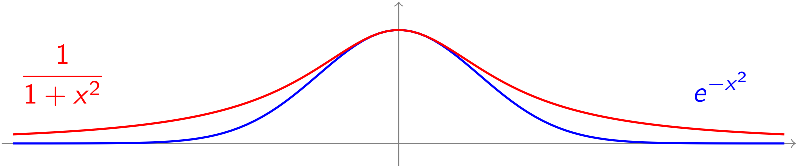
- *Falls* $0 \leq g \leq f$ *und* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *divergent, dann divergiert auch* $\int_a^\infty f(x)\,dx$

Analog für $f, g \colon (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ *oder* $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Beispiel 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

- e^{-x^2} lokal int'bar auf $\mathbb{R}$ (stetig)
- Keine Stammfunktion
- Konvergiert $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$?



Beispiel 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{x^2}}\,dx$$

- $e^{x^2} \overset{\text{Taylor}}{=} 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2!} + \dfrac{x^6}{3!} + \cdots \geq 1 + x^2$
- $0 < e^{-x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ konvergiert und $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$
- Behauptung: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ ☞ später im Kurs

Beispiel 2

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx$$

- Grobe Abschätzung: $\dfrac{1}{1+x^3} \approx \dfrac{1}{x^3}$ für große x
- Vermutung: konvergent
- Für $x > 0$: $\dfrac{1}{1+x^3} < \dfrac{1}{x^3}$
- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx$ konvergiert, weil $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ konvergiert
- $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx$ konvergiert

Beispiel 3

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

- Grobe Abschätzung: $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}} \approx \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ für große x
- Vermutung: divergent
- Für $x \geq 1$: $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}} \geq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$ divergiert, weil $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ divergiert
- $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$ divergiert

Konvergenzkriterien

Satz (Cauchysches Integralkriterium)

Gegeben: $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *lokal int'bar, monoton fallend*

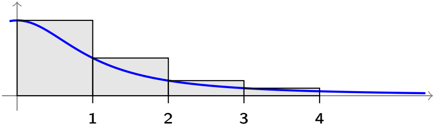
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} f(i)$ *konvergent* $\iff$ $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ *konvergent*

Analog für $a \in \mathbb{N}$ *und* $\displaystyle\sum_{i=a}^{\infty} f(i)$ *bzw.* $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$

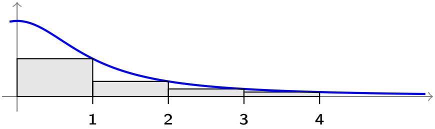
Konvergenzkriterien

Beweisidee:

- $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} f(i)$ Obersumme für $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$



- $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ Untersumme für $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$



Beispiele

- $f : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$
  - Für $\alpha > 1$: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ konvergiert $\iff$ $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert
  - Für $\alpha \leq 1$: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ divergiert $\iff$ $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ divergiert
- $f : [2, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x \ln(x)}$
  - Substitution $u = \ln(x) \implies du = \frac{1}{x}\, dx$
  - $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x \ln(x)}\, dx = \int_{\ln(2)}^\infty \frac{1}{u}\, du$ divergent
  - $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln(n)}$ divergent

Typ 2: Unbeschränkte Funktion

Definition

Gegeben: $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$

- f lokal integrierbar $\quad :\Longleftrightarrow \quad$ f int'bar auf $[a,c]$ für alle $c \in [a,b)$
- Falls f lokal int'bar:
  $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent $\quad :\Longleftrightarrow \quad \displaystyle\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$ existiert
- Dann $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$

- Analog für $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ (Grenzwert für $c \to a^+$)
- Für $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$: $(a,c]$ und $[c,b)$ separat (mit $c \in (a,b)$ bel.)

Beispiel 1

$$f\colon (0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \qquad (\alpha > 0)$$

- f lokal int'bar auf $(0,1]$
- Stammfunktion $F(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{für } \alpha = 1, \\ \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} & \text{sonst} \end{cases}$
- $\alpha \geq 1$: $\quad \lim_{x \to 0^+} F(x) = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ divergiert
- $\alpha < 1$: $\quad \lim_{x \to 0^+} F(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{1-\alpha} - 0 = \frac{1}{1-\alpha}$

Folgerung

$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ divergiert für alle $\alpha > 0$

Beispiel 2

$$f\colon (0,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

- f lokal int'bar auf $(0,1)$
- Stammfunktion $F(x) = \ln|\ln(x)|$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = \infty \qquad$ (und $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = -\infty$)
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x \ln(x)}\, dx$ divergiert

Typ 2: Unbeschränkte Funktion

Satz (Vergleichskriterium)

Gegeben: $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ *lokal int'bar*

- *Falls* $|f| \leq g$ *und* $\int_a^b g(x)\,dx$ *konvergent, dann konvergiert auch* $\int_a^b f(x)\,dx$ *und*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

- *Falls* $0 \leq g \leq f$ *und* $\int_a^b g(x)\,dx$ *divergent, dann divergiert auch* $\int_a^b f(x)\,dx$

Analog für $f, g\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ *oder* $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$

Beispiel 1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x\sin(x)}\,dx$$

- $\dfrac{1}{x\sin(x)} \geq \dfrac{1}{x} \geq 0$ für $x > 0$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}\,dx$ divergiert $\quad\Longrightarrow\quad$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x\sin(x)}\,dx$ divergiert

Beispiel 2

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)^2}{\sqrt{x}}\, dx$$

- Aus Mathematik A: $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$ für $\alpha > 0$
- Daher $\lim_{x\to 0^+} x^{1/4} \ln(x)^2 = 0$
- $\exists M > 0$ mit $\ln(x)^2 \leq \frac{M}{x^{1/4}}$ auf $(0,1]$ $\implies$ $\frac{\ln(x)^2}{\sqrt{x}} \leq \frac{M}{x^{3/4}}$
- $\int_0^1 \frac{M}{x^{3/4}}\, dx$ konvergiert $\implies$ $\int_0^1 \frac{\ln(x)^2}{\sqrt{x}}\, dx$ konvergiert

Bemerkung

Gegeben: $f\colon [a,b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ konv. $\quad :\Longleftrightarrow \quad \displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ und $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ konv.
- Dann $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Beispiel 1

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|^\alpha}\, dx \qquad (\alpha > 0)$$

- Polstelle bei $x = 0$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ konvergiert $\quad\iff\quad \alpha < 1$
- $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{|x|^\alpha}\, dx$ analog
- $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ konvergiert $\quad\iff\quad \alpha < 1$

Beispiel 2

$$\int_0^2 \frac{1}{\ln(x)^2}\, dx$$

- $\frac{1}{\ln(x)^2}$ bei $x = 0$ nicht definiert
- Polstelle bei $x = 1$
- Aus Mathematik A: $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$
- $\exists M > 1$ mit $\ln(x)^2 \leq M(x-1)^2$ auf $[0, 2] \setminus \{1\}$
- $\int_1^2 \frac{1}{M(x-1)^2}\, dx$ divergiert $\quad \Longrightarrow \quad \int_1^2 \frac{1}{\ln(x)^2}\, dx$ divergiert

Beispiel: Typen 1 und 2 gemischt

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}} = \infty$
- Aufteilen, z.B. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ und $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$
- Auf $(0,\pi]$: $\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
- $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergiert $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergiert

Beispiel: Typen 1 und 2 gemischt

- Auf $[\pi, \infty)$: Partielle Integration $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g'(x) = \cos(x)$
- $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\int \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\,dx$
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = 0$
- $\displaystyle\left|\frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$
- $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ konvergiert $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\,dx$ konvergiert

  $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergiert
- $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergiert

Die Gammafunktion

Definition

Gammafunktion $\Gamma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$

Satz

$\Gamma(\alpha)$ *konvergiert für jedes* $\alpha > 0$

Kritische Stellen:

- $x \to 0^+$ (falls $\alpha < 1$)
- $x \to \infty$

☞ Aufsplitten in $\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$ und $\int_1^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$

Die Gammafunktion

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

- Für $\alpha \geq 1$: $x^{\alpha-1}e^{-x}$ stetig auf $[0,1]$ $\implies$ $\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ existiert
- Für $\alpha < 1$:
  - $x^{\alpha-1}e^{-x} \leq x^{\alpha-1}$
  - $\int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx$ konvergiert
  - $\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ konvergiert

Die Gammafunktion

$$\int_1^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

- Aus Mathematik A: $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha+1} e^{-x} = 0$
- $\exists M > 0$ mit $x^{\alpha+1} e^{-x} \leq M$ auf $[1, \infty)$
- $x^{\alpha-1} e^{-x} \leq \dfrac{M}{x^2}$
- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{M}{x^2}\, dx$ konvergiert
- $\displaystyle\int_1^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$ konvergiert

Werte der Gammafunktion

- $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 0 - (-1) = 1$
- $\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty x^{(\alpha+1)-1} e^{-x}\,dx = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx$

  ☞ Partielle Integration: $f(x) = x^\alpha$, $g'(x) = e^{-x}$

  $$\Gamma(\alpha+1) = \underbrace{x^\alpha(-e^{-x})\Big|_0^\infty}_{=0} + \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx = \alpha\Gamma(\alpha)$$
- $\Gamma(n+1) = n!$

Werte der Gammafunktion

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x}\, dx$
  - Substitution $u = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad \Longrightarrow \quad du = \frac{1}{2} x^{-1/2}\, dx$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty 2e^{-u^2}\, du = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$$