G: Funktionen in mehreren Variablen

Funktionen

Bisher:

- Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Raumkurven $\vec{x}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$

Außerdem möglich:

- Funktionen in n Variablen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
  z.B. Höhenangaben auf Karte, Temperaturverteilung in Raum etc.
- Vektorfelder $\vec{v}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$
  z.B. Magnetfeld, Windrichtungen etc.

Funktionen in mehreren Variablen

Schreibweise: $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$

- Sprechweise: Reellwertige Funktion
  (vs. vektorwertige Funktion = Vektorfeld)
- $f(x, y)$ statt $f(x_1, x_2)$
- $f(x, y, z)$ statt $f(x_1, x_2, x_3)$

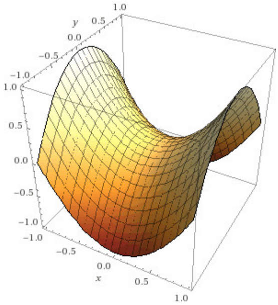
Funktionen in zwei Variablen

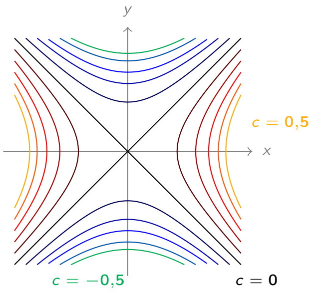
Gegeben: Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$

- Funktionsgraph $\big\{\big(x, y, f(x, y)\big) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D\big\}$ = Fläche in $\mathbb{R}^3$
- Höhenlinien: $\{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}$ für c konstant

  ☞ Zeichnung in Ebene

Beispiel: $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$





Mengen in $\mathbb{R}^n$

Erinnerung

Gegeben: $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

- Abstand von $\vec{x}, \vec{y} \quad := \quad \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$
  (Norm/Länge von $\vec{x} - \vec{y}$)

Definition

Gegeben: $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$

- Offene Kugel um $\vec{a}$, Radius r:

$$U_r(\vec{a}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$$

Menge der Punkte mit Abstand $< r$ von $\vec{a}$

Mengen in $\mathbb{R}^n$

Definition

Gegeben: $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$

- $\vec{a}$ innerer Punkt von D $\quad :\Longleftrightarrow \quad \exists r > 0$ mit $U_r(\vec{a}) \subseteq D$
- Innere von D $\quad := \quad$ Menge $\mathring{D}$ der inneren Punkte
- $\vec{a}$ Randpunkt $\quad :\Longleftrightarrow \quad$ jedes $U_r(\vec{a})$ trifft sowohl D als auch $\mathbb{R}^n \setminus D$
- Rand von D $\quad := \quad$ Menge ∂D der Randpunkte
- Abschluss von D $\quad := \quad$ Menge $\bar{D} = D \cup \partial D$
- D offen $\quad :\Longleftrightarrow \quad D = \mathring{D} \quad (\Longleftrightarrow \quad D \cap \partial D = \emptyset)$
- D abgeschlossen $\quad :\Longleftrightarrow \quad D = \bar{D} \quad (\Longleftrightarrow \quad \partial D \subseteq D)$

Beispiel

$D = U_1(\vec{0}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| < 1\}$

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{a}\| < 1$ ($\vec{a} \in D$), $\left\|\vec{b}\right\| = 1$ und $\|\vec{c}\| > 1$
- $U_r(\vec{a}) \subseteq D$ für $r := 1 - \|\vec{a}\| > 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} \in \mathring{D}$
- $D = \mathring{D}$, also offen
- Jedes $U_r(\vec{b})$ enthält $\vec{x}$ mit $\|\vec{x}\| < 1$
- $U_r(\vec{b})$ trifft D und $\mathbb{R}^n \setminus D \quad \Longrightarrow \quad \vec{b} \in \partial D$
- $U_r(\vec{c}) \cap D = \emptyset$ für $r := \|\vec{c}\| - 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{c} \notin \bar{D}$
- $\partial D = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| = 1\}$
- $\bar{D} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| \leq 1\}$

Bemerkung

- $U_r(\vec{a})$ offen
- $\partial U_r(\vec{a}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{a}\| = r\}$
- $\bar{U}_r(\vec{a}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq r\}$

Definition

Gegeben: $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\quad \vec{a} \in D \cup \partial D$

- f hat in $\vec{a}$ Grenzwert $c \in \mathbb{R}$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad$ für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so dass $|f(\vec{x}) - c| < \varepsilon$ für alle $\vec{x} \in D \setminus \{\vec{a}\}$ mit $\|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$

  ☞ Schreibweise $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = c$

- f stetig in $\vec{a} \in D$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$
- f stetig auf D $\quad :\Longleftrightarrow \quad$ f stetig in jedem $\vec{a} \in D$

Bemerkung

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = c$$

$$\iff$$

Für jede Folge $\vec{x}^{(m)} \in D \setminus \{\vec{a}\}$ mit $\vec{x}^{(m)} \xrightarrow{m\to\infty} \vec{a}$ gilt $\lim\limits_{m\to\infty} f(\vec{x}^{(m)}) = c$

Satz

Gegeben: $f_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *stetig,* $c_i \in \mathbb{R}$ *für* $i = 1, \ldots, k$

- $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_i(\vec{x}) < c_i \text{ für alle } i\}$ *offen*
- $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_i(\vec{x}) \leq c_i \text{ für alle } i\}$ *abgeschlossen*

Analog für $>$ *und* $\geq$

Grenzwerte und Stetigkeit

Gegeben: Rationale Funktion $f(x, y)$ mit Zähler & Nenner $= 0$ bei $(0, 0)$
Gesucht: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$

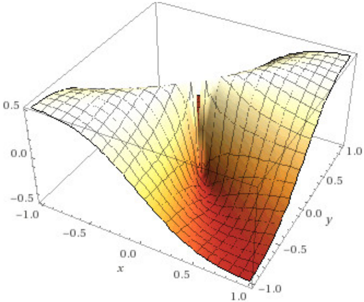
- Ansatz: Polarkoordinaten $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$
- $r \to 0$, φ beliebig (variabel)
- Kürzen & vereinfachen
  - Keine Terme ohne r in Zähler & Terme ohne r in Nenner $\neq 0$ für alle φ $\implies$ Grenzwert 0
  - Keine Terme ohne r in Nenner $\implies$ Grenzwert existiert nicht
  - Zähler & Nenner mit Termen ohne r
    - ⋆ Manche davon von φ abhängig $\implies$ Grenzwert existiert nicht
    - ⋆ Alle von φ unabhängig $\implies$ Grenzwert existiert

Achtung:
Keine Terme ohne r in Zähler, Terme ohne r in Nenner $= 0$ für manche φ $\implies$ keine Aussage!

Beispiel 1

Existiert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$?

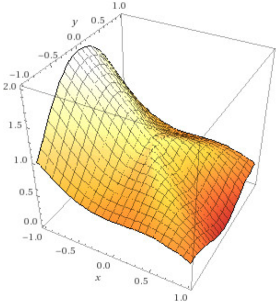
- Polarkoordinaten $\longrightarrow$ $\dfrac{r^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r^2\cos(\varphi)^2 + r^2\sin(\varphi)^2} = \dfrac{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)^2+\sin(\varphi)^2}$
- $\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad \cos(\varphi)\sin(\varphi)$
- Von φ abhängig $\Longrightarrow$ Grenzwert existiert nicht



Beispiel 2

Existiert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2-x^3}{x^2+y^2+y^4}$?

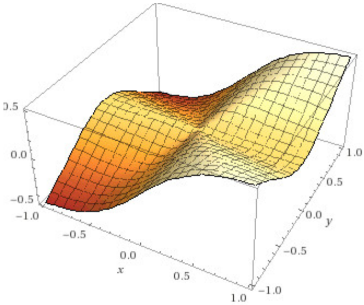
- Polarkoordinaten $\longrightarrow$ $\dfrac{r^2\cos(\varphi)^2+r^2\sin(\varphi)^2-r^3\cos(\varphi)^3}{r^2\cos(\varphi)^2+r^2\sin(\varphi)^2+r^4\sin(\varphi)^4}$
- Kürzen & Vereinfachen $\longrightarrow$ $\dfrac{1-r\cos(\varphi)^3}{1+r^2\sin(\varphi)^4} \xrightarrow{r\to 0} 1$



Beispiel 3

Existiert $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$?

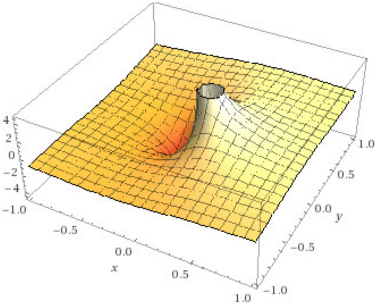
- Polarkoordinaten $\longrightarrow$ $\displaystyle\frac{r^3\cos(\varphi)\sin(\varphi)^2}{r^2\cos(\varphi)^2+r^2\sin(\varphi)^2}$
- Kürzen & Vereinfachen $\longrightarrow$ $r\cos(\varphi)\sin(\varphi)^2 \xrightarrow{r\to 0} 0$



Beispiel 4

Existiert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y^3}{x^2+y^2}$?

- Polarkoord. $\longrightarrow \quad \frac{r\cos(\varphi)+r^3\sin(\varphi)^3}{r^2\cos(\varphi)^2+r^2\sin(\varphi)^2} = \frac{\cos(\varphi)+r^2\sin(\varphi)^3}{r}$
- Divergiert z.B. für $\varphi = 0$



Beispiel 5

Existiert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$?

- Polarkoordinaten $\longrightarrow \dfrac{r^3\cos(\varphi)\sin(\varphi)^2}{r^2\cos(\varphi)^2 + r^4\sin(\varphi)^4}$
- Kürzen $\longrightarrow \dfrac{r\cos(\varphi)\sin(\varphi)^2}{\cos(\varphi)^2 + r^2\sin(\varphi)^4}$
- Wenn $\varphi \notin \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ konstant, dann $\stackrel{r\to 0}{\longrightarrow} 0$
- Wenn z.B. $\varphi \to \frac{\pi}{2}$?
- Anderer Ansatz: Bestimmte Typen von $(x,y) \to (0,0)$ einsetzen

Beispiel 5

Existiert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$?

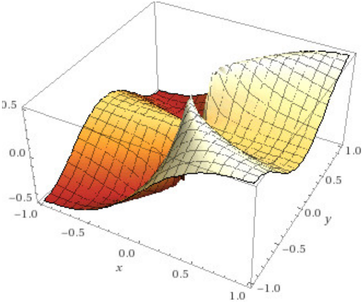
- $(x,y) = (x,0)$ mit $x \to 0 \quad \longrightarrow \quad \dfrac{x \cdot 0}{x^2+0} = 0$
- $(x,y) = (0,y)$ mit $y \to 0 \quad \longrightarrow \quad \dfrac{0 \cdot y^2}{0+y^4} = 0$
- $(x,y) = (x,cx)$ mit $x \to 0 \quad \longrightarrow \quad \dfrac{c^2x^3}{x^2+c^4x^4} = \dfrac{c^2x}{1+c^4x^2} \xrightarrow{x\to 0} 0$
- $(x,y) = (x,cx^2)$ mit $x \to 0 \quad \longrightarrow \quad \dfrac{c^2x^5}{x^2+c^4x^6} = \dfrac{c^2x^3}{1+c^4x^6} \xrightarrow{x\to 0} 0$
- $(x,y) = (cy^2,y)$ mit $y \to 0 \quad \longrightarrow \quad \dfrac{cy^4}{c^2y^4+y^4} = \dfrac{c}{c^2+1}$

  Hängt von c ab $\implies$ Grenzwert existiert nicht

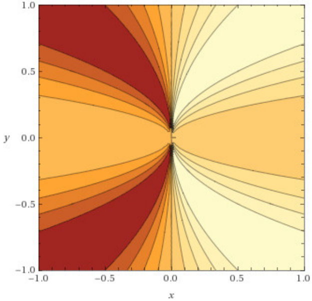
Beispiel 5

Existiert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$?

Funktionsgraph



Höhenlinien



Bemerkung

Einsetzmethode

- $(x, y) = (x, 0)$ mit $x \to 0$
- $(x, y) = (0, y)$ mit $y \to 0$
- $(x, y) = (x, cx)$ mit $x \to 0$
- $(x, y) = (x, cx^2)$ mit $x \to 0$
- $(x, y) = (cy^2, y)$ mit $y \to 0$
- $\cdots$

funktioniert nur für nicht existierende Grenzwerte

Definition

Gegeben: $\vec{v}\colon D \to \mathbb{R}^d$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\quad \vec{a} \in D \cup \partial D$

- $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{v}(\vec{x}) = \vec{c} \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} v_j(\vec{x}) = c_j$ für jede Koordinate j
- $\vec{v}$ stetig in $\vec{a} \in D \quad :\Longleftrightarrow \quad$ jede Koordinate v_j stetig in $\vec{a}$
  $\Longleftrightarrow \quad \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{a})$
- $\vec{v}$ stetig auf $D \quad :\Longleftrightarrow \quad \vec{v}$ stetig in jedem $\vec{a} \in D$
  $\Longleftrightarrow \quad$ jede Koordinate v_j stetig auf D

Satz

- *Für $j = 1, \ldots, n$ ist Projektion $\pi_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\pi_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$ stetig*
- *Summen, Produkte, Skalarprodukte stetiger Funktionen sind stetig.*
  $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ und $\vec{v}, \vec{w} \colon D \to \mathbb{R}^d$ stetig in $\vec{a}$ $\implies$ ebenfalls stetig:
  - *$f + g$ und $\vec{v} + \vec{w}$,*
  - *fg und $f\vec{v} = \begin{pmatrix} fv_1 \\ \vdots \\ fv_d \end{pmatrix}$,*
  - $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 w_1 + \cdots + v_d w_d$
- *$f, g \colon D \to \mathbb{R}$ stetig in $\vec{a}$ und $g(\vec{a}) \neq 0$ $\implies$ Quotient $\dfrac{f}{g}$ stetig in $\vec{a}$*
- *$\vec{v} \colon D \to \mathbb{R}^d$ stetig in $\vec{a}$ und $\vec{w} \colon \vec{v}(D) \to \mathbb{R}^m$ stetig in $\vec{v}(\vec{a})$ $\implies$*
  Verknüpfung $\vec{w} \circ \vec{v}(\vec{x}) = \vec{w}\big(\vec{v}(\vec{x})\big)$ stetig in $\vec{a}$

Bemerkung

- Setzt sich $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aus stetigen Funktionen der einzelnen x_i zusammen, ist f stetig auf seinem Definitionsbereich
- Polynome sind stetig auf $\mathbb{R}^n$

Beispiel 1

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- f stetig in $\vec{a} \neq (0,0)$ (Zusammensetzung stetiger Funktionen)
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert nicht $\implies$ f in $(0,0)$ nicht stetig

Beispiel 2

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-x^3}{x^2+y^2+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- f stetig in $\vec{a} \neq (0,0)$ (Zusammensetzung stetiger Funktionen)
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 \neq f(0,0) \implies f$ in $(0,0)$ nicht stetig

Beispiel 3

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- f stetig in $\vec{a} \neq (0,0)$ (Zusammensetzung stetiger Funktionen)
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \quad \Longrightarrow \quad f$ in $(0,0)$ stetig
- f auf $\mathbb{R}^2$ stetig

Beispiel 4

$$\vec{v}(x,y) = \ln(x-y^2)\begin{pmatrix}\tan\left(\frac{x}{y}\right)\\ \sqrt{\frac{y}{x}}\end{pmatrix}$$

- Zusammensetzung stetiger Funktionen $\implies$ stetig auf Def'bereich
- Def'bereich:
  - $x > y^2$,
  - $x, y \neq 0$,
  - $\frac{x}{y} \notin \left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$,
  - $\frac{y}{x} > 0$

Beispiel 5

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2-y)}{x^2-y} & \text{für } y \neq x^2, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- $f = g \circ h$ mit $h(x,y) = x^2 - y$ und $g(u) = \begin{cases} \dfrac{\sin(u)}{u} & \text{für } u \neq 0, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$
- h stetig auf $\mathbb{R}^2$
- g stetig auf $\mathbb{R}$, weil $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sin(u)}{u} = 1$
- f stetig auf $\mathbb{R}^2$