Fragen? florian.thomas@tugraz.at

Erinnerung

Die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist definiert durch*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Erinnerung

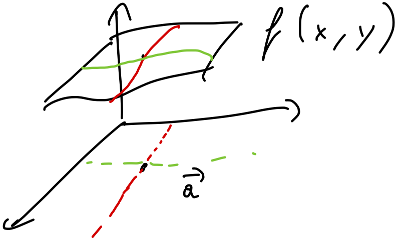
Die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Anwendungsbereiche:

- Monotonie- und Krümmungsverhalten (Interpretation als Steigung)
- Approximation (Taylorreihe)
- Extremwertbestimmung

Gegeben:
Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$,
innerer Punkt $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$



Gegeben:
Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$,
innerer Punkt $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$

Sofern die Ableitung der partiellen Funktion

$$x_i \mapsto f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

existiert, bezeichnen wir sie als partielle Ableitung der Funktion f nach x_i im Punkt $\vec{a}$.

Schreibweisen: $\frac{\partial f}{\partial x_i}\big|_{\vec{x}=\vec{a}}$, $\quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$, $\quad f_{x_i}(\vec{a})$

Falls in $\vec{a}$ alle partiellen Ableitungen existieren, dann definieren wir

$$\operatorname{grad} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

Sprechweise: Gradient von f in $\vec{a}$, Nabla f

Bemerkung: Existiert ∇f auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ so ist dadurch ein Vektorfeld definiert.

Beispiel 1

$f(x,y,z) = e^{x+2y} + 2x \sin z + xyz^2$

$$f_x = e^{x+2y} + 2 \cdot \sin z + y \cdot z^2$$

$$f_y = 2 \cdot e^{x+2y} + 0 + xz^2$$

$$f_z = 0 + 2x \cdot \cos z + 2 \cdot x \cdot y \cdot z$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+2y} + 2\sin z + yz^2 \\ 2 \cdot e^{x+2y} + xz^2 \\ 2x\cos z + 2xyz \end{pmatrix}$$

Beispiel 2: Abstandsfunktion

$$d(\vec{x}) := \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

$$\frac{\partial d}{\partial x_i} = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} \cdot \cancel{2} \cdot x_i$$

$$= \frac{x_i}{\|\vec{x}\|}$$

$$\nabla d = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\|\vec{x}\|} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{\|\vec{x}\|} \end{pmatrix} = \vec{x} \cdot \frac{1}{\|\vec{x}\|}$$

Beispiel 3

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y} = 0$$

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ — Steigung von f in Richtung der x_i-Achse:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t \cdot \vec{e_i}) - f(\vec{x})}{t}$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ — Steigung von f in Richtung der x_i-Achse:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t \cdot \vec{e_i}) - f(\vec{x})}{t}$$

Allgemeiner: Richtung gegeben durch $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{v}\| = 1$

Die Richtungsableitung von f im Punkt $\vec{x}$ in Richtung $\vec{v}$ ist

$$\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t \cdot \vec{v}) - f(\vec{x})}{t},$$

falls der Grenzwert existiert.

Beispiel

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

$$(a,b) \text{ mit } \|(a,b)\| = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$$

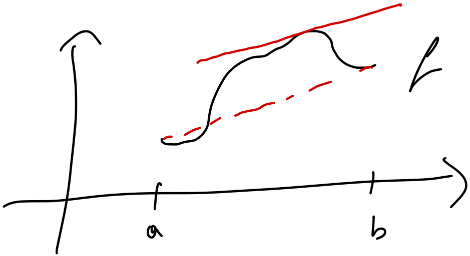
$$f((0,0) + t\cdot(a,b)) = f(t\cdot a, t\cdot b)$$

$$= \frac{t^2 \cdot ab}{t^2(a^2+b^2)} = \begin{cases} ab & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

Satz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gibt es $\xi \in [a, b]$ so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Annahme:

$(x, y) = (x_0, y_0) + t \cdot (a, b)$ mit $\|(a, b)\| = 1$

Partielle Ableitungen existieren und sind stetig.

Annahme:

$(x, y) = (x_0, y_0) + t \cdot (a, b)$ mit $\|(a, b)\| = 1$

Partielle Ableitungen existieren und sind stetig.

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \big(f(x,y) - f(x_0,y)\big) + \big(f(x_0,y) - f(x_0,y_0)\big)$$

$$= (x-x_0) \cdot f_x(\xi, y) + (y-y_0) f_y(x_0, \eta)$$

$$= (x-x_0) f_x(x_0,y_0) + (y-y_0) f_y(x_0,y_0) + \varepsilon(x,y)$$

$$\varepsilon(x,y) = (x-x_0)\big(f_x(\xi,y) - f_x(x_0,y_0)\big) + (y-y_0) \cdot \big(f_y(x_0,\eta) - f_y(x_0,y_0)\big)$$

Annahme:
$(x, y) = (x_0, y_0) + t \cdot (a, b)$ mit $\|(a, b)\| = 1$
Partielle Ableitungen existieren und sind stetig.

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0) + \epsilon(x, y)$$

mit

$$\epsilon(x, y) = (x - x_0)(f_x(\xi, y) - f_x(x_0, y_0)) + (y - y_0)(f_y(x_0, \eta) - f_y(x_0, y_0))$$

Annahme:

$(x,y) = (x_0,y_0) + t \cdot (a,b)$ mit $\|(a,b)\| = 1$

Partielle Ableitungen existieren und sind stetig.

$$\underbrace{f(x,y) - f(x_0,y_0)}_{t} = \underbrace{(x-x_0)}_{\substack{t \\ a}} f_x(x_0,y_0) + \underbrace{(y-y_0)}_{\substack{t \\ b}} f_y(x_0,y_0) + \underbrace{\epsilon(x,y)}_{t}$$

mit

$$\underbrace{\epsilon(x,y)}_{t} = \underbrace{(x-x_0)}_{\substack{t \\ a}}\underbrace{(f_x(\xi,y) - f_x(x_0,y_0))}_{\to 0} + \underbrace{(y-y_0)}_{\substack{t \\ b}}\underbrace{(f_y(x_0,\eta) - f_y(x_0,y_0))}_{\to 0}$$

$$\partial_{(a,b)} f(x_0,y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{t}$$

$$= a \cdot f_x(x_0,y_0) + b \cdot f_y(x_0,y_0)$$

Annahme:

$(x, y) = (x_0, y_0) + t \cdot (a, b)$ mit $\|(a, b)\| = 1$

Partielle Ableitungen existieren und sind stetig.

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (x - x_0) f_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f_y(x_0, y_0) + \epsilon(x, y)$$

mit

$$\epsilon(x, y) = (x - x_0)(f_x(\xi, y) - f_x(x_0, y_0)) + (y - y_0)(f_y(x_0, \eta) - f_y(x_0, y_0))$$

$$\partial_{(a,b)} f(x_0, y_0) = a\, f_x(x_0, y_0) + b\, f_y(x_0, y_0) = \langle (a, b), \nabla f(x_0, y_0) \rangle$$

Satz

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Falls ∇f in einer Kreisscheibe $B_r(\vec{x_0})$ existiert und stetig ist, so gilt für jede Richtungsableitung

$$\partial_{\vec{v}} f(\vec{x_0}) = \langle \vec{v}, \nabla f(\vec{x_0}) \rangle$$

Insbesondere:

falls $\nabla f(\vec{x_0}) \neq 0$, dann ist $\frac{\nabla f(\vec{x_0})}{\|\nabla f(\vec{x_0})\|}$ die Richtung des stärksten Anstiegs

$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x_0}) - \langle \vec{x} - \vec{x_0}, \nabla f(\vec{x_0}) \rangle}{\|\vec{x} - \vec{x_0}\|} = 0$ $\quad f(\vec{x}_0) + \langle \vec{x} - \vec{x}_0 , \nabla f(\vec{x}_0))$

Beispiel

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a, b) mit $\|(a, b)\| = 1$

$$\partial_{(a,b)}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t \cdot a, t \cdot b) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\cancel{t^3} \cdot a \cdot b^2}{\cancel{t^2}(a^2 + t^2 \cdot b^4)}}{\cancel{t}} = \lim_{t \to 0} \frac{a \cdot b^2}{a^2 + t^2 \cdot b^4} = \frac{b^2}{a} \text{ falls } a \neq 0$$

$$= 0 \quad a = 0$$

Eine Hyperebene durch den Punkt $(\vec{x_0}, f(\vec{x_0}))$ ist eine Funktion $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Form

$$p(\vec{x}) = f(\vec{x_0}) + \left\langle \vec{k}, \vec{x} - \vec{x_0} \right\rangle$$

$$n=1: \quad p(x) = f(x_0) + k \cdot (x - x_0)$$

$$= (f(x_0) - k \cdot x_0) + k \cdot x$$

Eine Hyperebene durch den Punkt $(\vec{x_0}, f(\vec{x_0}))$ ist eine Funktion $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Form

$$p(\vec{x}) = f(\vec{x_0}) + \left\langle \vec{k}, \vec{x} - \vec{x_0} \right\rangle$$

Definition

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, und sei $\vec{x_0}$ ein innerer Punkt von D.
f heißt in $\vec{x_0}$ (total) differenzierbar, wenn $\vec{k} \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x_0}) - \left\langle \vec{k}, \vec{x} - \vec{x_0} \right\rangle}{\|\vec{x} - \vec{x_0}\|} = 0$$

Satz

Sei f in $\vec{x_0}$ total differenzierbar mit

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x_0}) - \left\langle \vec{k}, \vec{x} - \vec{x_0} \right\rangle}{\|\vec{x} - \vec{x_0}\|} = 0,$$

dann gilt

1. *f ist stetig in $\vec{x_0}$*
2. *$\partial_{\vec{v}} f(\vec{x_0}) = \left\langle \vec{v}, \vec{k} \right\rangle$ für jede Richtung $\vec{v}$*
3. *f ist partiell differenzierbar und $\vec{k} = \nabla f(\vec{x_0})$*

Beispiel: Tangentialebene

$f(x,y) = -(x^2+y^2),\ \vec{x_0} = (1,1)$

$$z = f(\vec{x}_0) + \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle$$

$$f(\vec{x}_0) = -2$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}, \quad \nabla f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$z = -2 + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$z = -2 + (-2x+2) + (-2y+2) = 2 - 2x - 2y$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle}{\| \vec{x} - \vec{x}_0 \|} = 0$$

Satz

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Falls ∇f in einer Kugel $B_r(\vec{x}_0)$ existiert und stetig ist, so ist f in $\vec{x}_0$ (total) differenzierbar.

Wir nennen f auf D stetig differenzierbar, wenn die partiellen Ableitungen auf ganz D existieren und stetig sind.

f nicht stetig
oder
partielle Ableitung existiert nicht
oder
eine Richtungsableitung existiert nicht

$\Longrightarrow$ f ist nicht differenzierbar

f nicht stetig
oder
partielle Ableitung existiert nicht
oder
eine Richtungsableitung existiert nicht

$\Longrightarrow$ f ist nicht differenzierbar

partielle Ableitungen existieren und sind stetig
oder
$\nabla f(\vec{x_0})$ existiert und $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x_0}) - \langle \nabla f(\vec{x_0}), \vec{x} - \vec{x_0} \rangle}{\|\vec{x} - \vec{x_0}\|} = 0$

$\Longrightarrow$ f ist differenzierbar