Erinnerung (Kettenregel)

Gegeben:

$f: D \to \mathbb{R}$ *differenzierbar mit* $D \subseteq \mathbb{R}$ *und*
$g: E \to D$ *differenzierbar mit* $E \subseteq \mathbb{R}$

Dann ist die Funktion F *gegeben durch* $F(x) = f(g(x))$ *differenzierbar und*

$$F'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Gegeben:
$f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ($D \subseteq \mathbb{R}^n$)
$\vec{x}\colon I \to D$ stetig differenzierbar ($I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall)

Betrachte die Funktion $h\colon I \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(t) = f(\vec{x}(t))$

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle + \varepsilon(\vec{x}) \qquad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{\varepsilon(\vec{x})}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|} = 0$$

$$t_0 \in I, \quad \vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$$

$$\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \frac{f(\vec{x}(t)) - f(\vec{x}_0)}{t - t_0} = \left\langle \nabla f(\vec{x}_0), \frac{\vec{x}(t) - \vec{x}_0}{t - t_0} \right\rangle + \frac{\varepsilon(\vec{x}(t))}{t - t_0}$$

$$\xrightarrow[t \to t_0]{} \langle \nabla f(\vec{x}_0), \dot{\vec{x}}(t) \rangle + \underbrace{\frac{\varepsilon(\vec{x}(t))}{\|\vec{x}(t) - x_0\|}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\|\vec{x}(t) - \vec{x}_0\|}{t - t_0}}_{\pm \|\dot{\vec{x}}\|}$$

Gegeben:
$f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ($D \subseteq \mathbb{R}^n$)
$\vec{x}\colon I \to D$ stetig differenzierbar ($I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall)

Betrachte die Funktion $h\colon I \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(t) = f(\vec{x}(t))$

Satz

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\overset{h(t)}{f(\vec{x}(t))} &= \left\langle \nabla f(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \right\rangle \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x(\vec{t})) \cdot \dot{x}_1(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x(\vec{t})) \cdot \dot{x}_n(t)
\end{aligned}$$

Beispiel 1

$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$, Kurve $\vec{x}(t) = (\cos t, \sin t)$

$$\frac{df(x_1(t), x_2(t))}{dt} = f_{x_1}(x_1(t), x_2(t)) \cdot \dot{x}_1(t) + f_{x_2}(x_1(t), x_2(t)) \cdot \dot{x}_2(t)$$

$$= 2 \cdot x_1(t) \cdot (-\sin(t)) + 4 \cdot x_2(t) \cdot \cos(t)$$

$$= -2 \cdot \cos t \sin t + 4 \cdot \sin t \cos t$$

$$= 2 \sin t \cdot \cos t$$

Beispiel 2: Produktregel

$F(t) = f(t) \cdot g(t)$, wobei f und g differenzierbar sind.

$$F'(t) = f'(t) \cdot g(t) + g'(t) \cdot f(t)$$

$$F(x,y) = x \cdot y \quad , \quad \big(x(t), y(t)\big) = \big(f(t), g(t)\big)$$

$$\frac{d F(x(t), y(t))}{dt} = y(t) \cdot \dot{x}(t) + x(t) \cdot \dot{y}(t)$$

Gegeben:
$f \colon D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ($D \subseteq \mathbb{R}^n$)
$\vec{g} \colon E \to D$ stetig differenzierbar ($E \subseteq \mathbb{R}^m$)

Betrachte die Funktion $F \colon E \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(t) = f(\vec{g}(\vec{t}))$

Satz

Unter den obingen Voraussetzungen is F stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(\vec{t_0}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{g}(\vec{t_0}))\,\frac{\partial g_i}{\partial t_j}(\vec{t_0})$$

Beispiel: Polarkoordinaten

$f(x,y)$ mit $\overset{x(r,\varphi)}{x} = r\cos\varphi$ und $\overset{y(r,\varphi)}{y} = r\sin\varphi \quad\rightarrow\quad F(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$$F_r = f_x \cdot x_r + f_y \cdot y_r = f_x \cdot \cos\varphi + f_y \sin\varphi$$

$$F_\varphi = f_x \cdot x_\varphi + f_y \cdot y_\varphi = f_x \cdot r\,(-\sin\varphi) + f_y \cdot r \cdot \cos\varphi$$

$$\begin{pmatrix} F_r \\ F_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r \cdot \sin\varphi & r \cdot \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos\varphi & -\sin\varphi \\ r\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_r \\ F_\varphi \end{pmatrix}$$

$$f_x = F_r \cos\varphi - \frac{1}{r} \cdot F_\varphi \cdot \sin\varphi$$

Erinnerung (Taylorformel)

Gegeben: 2-mal differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$, dann ist

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{1}{2}h^2\,f''(x) + \epsilon(\cancel{x}\,h),$$

wobei

$$\lim_{h \to 0} \frac{\epsilon(\cancel{x}\,h)}{h^2} = 0$$

Wenn die partiellen Ableitungen von f differenzierbar sind, dann definieren wir die zweiten partiellen Ableitungen durch

$$f_{x_i,x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Frage: $f_{x_i,x_j} \overset{?}{=} f_{x_j,x_i}$

Beispiel 1

$f(x,y) = x^2 e^{xy}$

$$f_x = 2x \cdot e^{xy} + x^2 y \cdot e^{xy}$$

$$f_y = x^3 \cdot e^{xy}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = 2x^2 \cdot e^{xy} + x^2 \cdot e^{xy} + x^2 y \cdot x \cdot e^{xy}$$

$$= 3x^2 e^{xy} + x^3 y \cdot e^{xy}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = 3x^2 \cdot e^{xy} + x^3 y \cdot e^{xy}$$

Beispiel 2

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Beispiel 2

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y-0} = \lim_{y \to 0} \frac{-y}{y} = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f_y(x,0) - f_y(0,0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

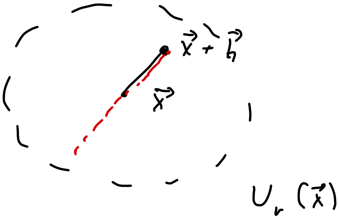
Satz (Satz von Schwarz)

Sind die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von f auf D stetig, dann gilt für $1 \leq i, j \leq n$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

Gegeben:

$f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$
$\vec{x}$ innerer Punkt von D mit $U_r(\vec{x}) \subseteq D$
$\vec{h}$ mit $\|\vec{h}\| < r$



Betrachte:

$g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(t) = f(\vec{x} + t \cdot \vec{h})$

Taylorformel in einer Variable:

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + \epsilon(1) \text{ bzw}$$

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(\theta) \text{ für geeignetes } \theta \in [0, 1]$$

$g(t) = f(\vec{x} + t \cdot \vec{h})$,
$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(\theta)$

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x} + t \cdot \vec{h}) \cdot h_i = \langle \vec{h}, \nabla f(\vec{x} + t \cdot \vec{h}) \rangle$$

$$g(t) = f(\vec{x} + t \cdot \vec{h}),$$
$$g(1) = g(0) + g'(0) + \tfrac{1}{2} g''(\theta)$$

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\vec{x}+t\cdot\vec{h})\cdot h_i$$

$g(t) = f(\vec{x} + t \cdot \vec{h}),$
$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(\theta)$

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\vec{x}+t\cdot\vec{h})\cdot h_i = \left\langle \vec{h}, \nabla f(\vec{x} + t \cdot \vec{h}) \right\rangle$$

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{x_i \, x_j} (\vec{x} + t \cdot \vec{h}) \cdot h_i \cdot h_j$$

$$g(t) = f(\vec{x} + t \cdot \vec{h}),$$
$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(\theta)$$

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\vec{x} + t \cdot \vec{h}) \cdot h_i = \left\langle \vec{h}, \nabla f(\vec{x} + t \cdot \vec{h}) \right\rangle$$

$$g''(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} f_{x_i x_j}(\vec{x} + t \cdot \vec{h}) \cdot h_i h_j$$

$$g(t) = f(\vec{x} + t \cdot \vec{h}),$$
$$g(1) = g(0) + g'(0) + \tfrac{1}{2} g''(\theta)$$

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\vec{x}+t\cdot\vec{h})\cdot h_i = \left\langle \vec{h}, \nabla f(\vec{x} + t \cdot \vec{h}) \right\rangle$$

$$g''(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} f_{x_i x_j}(\vec{x}+t\cdot\vec{h})\cdot h_i h_j = \left\langle \vec{h}, H_f(\vec{x} + t \cdot \vec{h})\, \vec{h} \right\rangle$$

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Satz

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $\vec{x}$ ein innerer Punkt von D mit $U_r(\vec{x}) \subseteq D$. Dann gilt für $\|\vec{h}\| < r$:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}+\vec{h}) &= f(\vec{x}) + \left\langle \vec{h}, \nabla f(\vec{x}) \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \vec{h}, H_f(\vec{x}+\theta\cdot\vec{h})\vec{h} \right\rangle && \textit{wobei } 0 \le \theta \le 1 \\ &= f(\vec{x}) + \left\langle \vec{h}, \nabla f(\vec{x}) \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \vec{h}, H_f(\vec{x})\vec{h} \right\rangle + \epsilon_2(\vec{h}) && \textit{wobei } \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\epsilon_2(\vec{h})}{\|\vec{h}\|^2} = 0 \end{aligned}$$

Spezialfall $f = f(x,y)$:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) = f(x,y) & \\ &+ h\, f_x(x,y) + k\, f_y(x,y) \\ &+ \frac{1}{2}h^2\, f_{xx}(x,y) + hk\, f_{xy}(x,y) + \frac{1}{2}k^2 f_{yy}(x,y) \\ &+ \epsilon_2(h,k) \end{aligned}$$

Beispiel 1

Taylorentwicklung von $f(\vec{x}) = \sin \|\vec{x}\|^2$ im Punkt $\vec{0}$

$$\sin\left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2\right)$$

$$f_{x_i} = \cos\left(\|\vec{x}\|^2\right) \cdot 2 \cdot x_i$$

$$f_{x_i, x_j} = 2 \cdot x_i \left(-\sin \|\vec{x}\|\right) \cdot 2 \cdot x_j \qquad (i \neq j)$$

$$f_{x_i, x_i} = 2 \cdot \cos \|\vec{x}\|^2 + 2 \cdot x_i \cdot \left(-\sin \|\vec{x}\|^2\right) \cdot 2 \cdot x_i$$

$$\nabla f(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$H_f(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{f(\vec{x}) = \frac{1}{2} \cdot \langle \vec{x}, H_f(\vec{0}) \vec{x} \rangle + \varepsilon(\vec{x})}$$

Beispiel 2

Taylorentwicklung von $f(x, y) = e^{x+y} + \sin(xy)$ im Punkt $(0, 0)$

$f(0,0) = 1$

$f_x(x,y) = e^{x+y} + y \cdot \cos xy$

$f_x(0,0) = 1$

$f_y(x,y) = e^{x+y} + x \cdot \cos xy$

$f_y(0,0) = 1$

$f_{xx}(x,y) = e^{x+y} + y^2(-\sin xy)$

$f_{xx}(0,0) = 1$

$f_{yy}(x,y) = e^{x+y} - x^2 \cdot \sin xy$

$f_{yy}(0,0) = 1$

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = e^{x+y} + \cos xy - xy \cdot \sin xy$

$f_{xy}(0,0) = 2$

$f(x,y) = 1 + (x+y) + \frac{1}{2}\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot 2 + y^2\right) + \varepsilon(x,y)$