Extremwerte

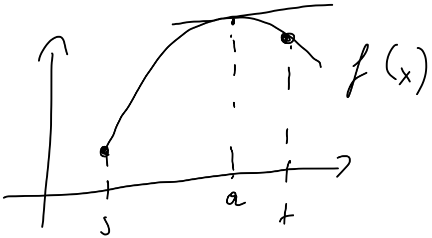
Gegeben:
$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Gesucht:
$\vec{a}$ mit $f(\vec{a}) = \max_{\vec{x}\in D} f(\vec{x})$ bzw.
$\vec{b}$ mit $f(\vec{b}) = \min_{\vec{x}\in D} f(\vec{x})$

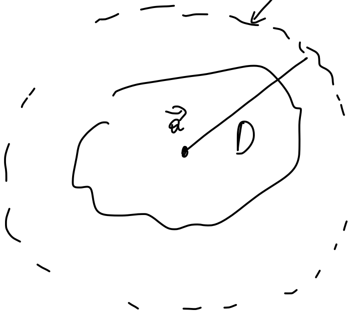
Spezialfall: $f: [s,t] \to \mathbb{R}$ differenzierbar

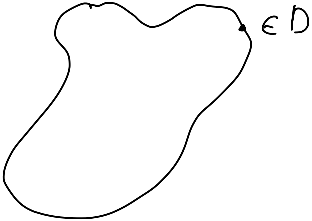
Zwei Möglichkeiten:

- Extremum in $a \in (s,t) \Rightarrow f'(a) = 0$ oder
- Extremum in s oder t



$D \subseteq R^n$ heißt kompakt, wenn D beschränkt und abgeschlossen ist.





$D \subseteq U_r(\vec{a})$

$\overline{U_r}(\vec{a}) := \{ \vec{x} : \| \vec{x} - \vec{a} \| \leq r \}$

$D \subseteq R^n$ heißt kompakt, wenn D beschränkt und abgeschlossen ist.

Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es Punkte $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in D sodass

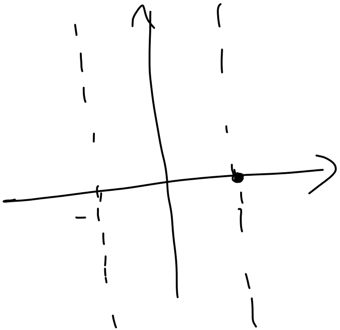
$$f(\vec{a}) = \max_{\vec{x} \in D} f(\vec{x}) \qquad \textit{und} \qquad f(\vec{b}) = \min_{\vec{x} \in D} f(\vec{x})$$

Beispiel

$f(x,y) = \frac{1}{1-x^2} + y^3 - y,\ D = \{(x,y) \mid |x| < 1\}$

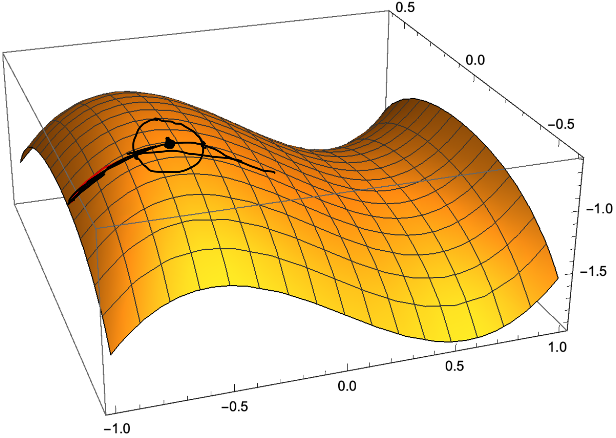
$\lim_{y \to \infty} f(0, y) = \infty$

$\lim_{y \to -\infty} f(0, y) = -\infty$



Beispiel

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x^2} + y^3 - y, \; D = \{(x,y) \mid |x| < 1\}$$



Gegeben: $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\vec{a} \in D$ heißt relatives bzw. lokales Maximum von f, wenn es $r \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(\vec{a}) = \max_{x \in D \cap U_r(\vec{a})} f(\vec{x})$$

$\vec{b} \in D$ heißt relatives bzw. lokales Minimum von f, wenn es $r \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(\vec{b}) = \min_{x \in D \cap U_r(\vec{b})} f(\vec{x})$$

Satz

Ist $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im inneren von D partiell differenzierbar, und ist $\vec{a}$ ein innerer Punkt in dem f ein relatives Extremum hat, dann gilt

$$\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$$

Ein Punkt $\vec{a}$ in dem $\nabla f(\vec{a}) = 0$ gilt heißt stationärer Punkt von f.

Beispiel

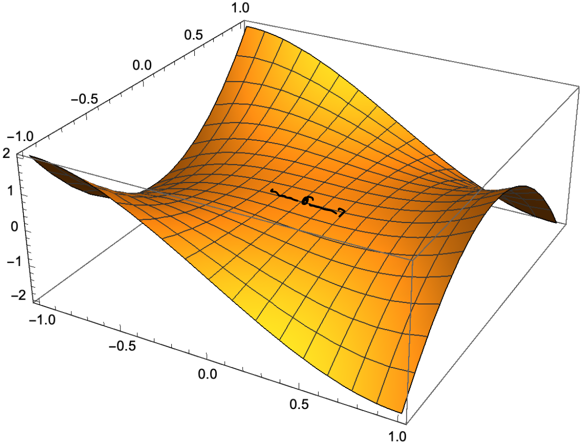
$f(x, y) = x^3 - 3xy^2$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 \\ 6 \cdot x \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$



Gegeben:

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

D kompakt

Gesucht:

$\vec{a}$ mit $f(\vec{a}) = \max_{\vec{x} \in D} f(\vec{x})$ bzw.

$\vec{b}$ mit $f(\vec{b}) = \min_{\vec{x} \in D} f(\vec{x})$

Gegeben:
$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
D kompakt

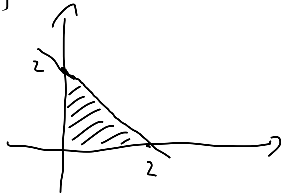
Gesucht:
$\vec{a}$ mit $f(\vec{a}) = \max_{\vec{x} \in D} f(\vec{x})$ bzw.
$\vec{b}$ mit $f(\vec{b}) = \min_{\vec{x} \in D} f(\vec{x})$

möglicher Lösungsweg

1. Bestimme Kandidaten im Inneren:
   Löse $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$ und prüfe, welche Lösungen im Inneren von D liegen
2. Bestimme Kandidaten am Rand:
   stark abhängig von D bzw. dem Rand von D
3. Vergleiche Funktionswerte aller gefundenen Kandidaten

Beispiel

$f(x,y) = xy^2(x+y-2)$ auf $D = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 2\}$



$f_x(x,y) = y^2(x+y-2) + xy^2 = y^2(2x+y-2)$

$f_y(x,y) = 2xy(x+y-2) + xy^2 = xy(2x+3y-4)$

$\nabla f(x,y) = \vec{0}$ $\quad \begin{matrix} 2x+y=2 \\ 2x+3y=4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{matrix}$

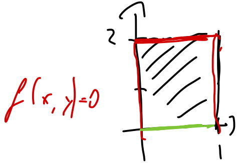
$f(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in \partial D$ $\to$ max

$f(\frac{1}{2}, 1) = -\frac{1}{4}$ $\to$ min

Beispiel

$f(x,y) = (x^2 - x)(y^2 - 3y + 2)$ auf $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} (2x-1)(y^2-3y+2) \\ (x^2-x)(2y-3) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}$$



- $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

  $2y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ $\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

- $y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = 1, \ (y = 2)$

  $x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0, \ x = 1$

$$f(x,0) = 2(x^2 - x) \qquad x \in [0,1]$$

$$f'(x,0) = 4x - 2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \ y = 0 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \longrightarrow \text{min}$$

$$f\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \longrightarrow \text{max}$$

Analyse stationärer Punkte

Gegeben:

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar

$\vec{a}$ stationärer Punkt im inneren von D

$\vec{x} - \vec{a}$

Taylorformel:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \left\langle \vec{h}, H_f(\vec{v})\, \vec{h} \right\rangle$$

mit $\vec{v}$ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{x}$

> 0 für <u>alle</u> $\vec{h} \neq \vec{0} \Rightarrow$ Lokales min in $\vec{a}$

< 0 für <u>alle</u> $\vec{h} \neq \vec{0} \Rightarrow$ Lokales max

Definition

Eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix A heißt

1. *positiv definit, wenn* $\left\langle \vec{h}, A\vec{h} \right\rangle > 0$ *für alle* $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\vec{h} \neq \vec{0}$.
2. *negativ definit, wenn* $\left\langle \vec{h}, A\vec{h} \right\rangle < 0$ *für alle* $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\vec{h} \neq \vec{0}$.
3. *indefinit, wenn es* $\vec{h}$ *und* $\vec{k}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *gibt, sodass* $\left\langle \vec{h}, A\vec{h} \right\rangle > 0$ *und* $\left\langle \vec{k}, A\vec{k} \right\rangle < 0$

Satz

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\vec{a}$ ein stationärer Punkt von f im Inneren von D.

1. *Ist $H_f(\vec{a})$ positiv definit, dann liegt in $\vec{a}$ ein relatives Minimum vom f vor.*
2. *Ist $H_f(\vec{a})$ negativ definit, dann liegt in $\vec{a}$ ein relatives Maximum vom f vor.*
3. *Ist $H_f(\vec{a})$ indefinit, dann liegt in $\vec{a}$ ein Sattelpunkt vom f vor.*

Beispiel

$f(\vec{x}) = \sin \|\vec{x}\|^2$

$f_{x_i}(\vec{x}) = 2x_i \cdot \cos \|\vec{x}\|^2 \qquad \nabla f = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$

$f_{x_i x_j}(\vec{x}) = 2x_i \cdot (2x_j) \cdot (-\sin \|\vec{x}\|^2)$

$f_{x_i x_j}(\vec{0}) = 0$

$f_{x_i x_i}(\vec{x}) = 2 \cos \|\vec{x}\|^2 + 2x_i \cdot 2x_i \cdot (-\sin \|x_i\|^2)$

$f_{x_i x_i}(\vec{0}) = 2$

$$H_f(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & & & \\ 0 & & \ddots & & \\ \vdots & & & & 2 \end{pmatrix}$$

$\langle \vec{h}, H_f(\vec{0}) \vec{h} \rangle$

$= 2 \cdot \|\vec{h}\|^2 > 0$

Beispiel

$f(x, y) = x^2 - y^2$

$f_x = 2x$

$f_y = -2y$

$\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow x = 0 \, , \, y = 0$

$f_{xx} = 2$

$f_{yy} = -2$

$f_{xy} = f_{yx} = 0$

$H_f(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, H_f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle > 0$

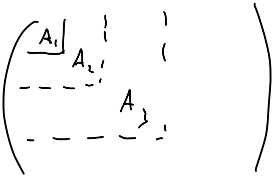
$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, H_f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle < 0$

$\Rightarrow$ indefinit

Satz

Sei A eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix und die Untermatrix A_k enthalte die Elemente der ersten k Zeilen und Spalten von A.

1. *Ist* $\det A_k > 0$ *für alle k, dann ist A positiv definit*
2. *Ist* $\det A_1 < 0$, $\det A_2 > 0$, $\det A_3 < 0$, $\det A_4 > 0, \ldots,$ *dann ist A negativ definit*
3. *Ist* $\det A \neq 0$ *und gilt keine der ersten beiden Aussagen, dann ist A indefinit*



Beispiel

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2y$$

$f_x(x,y,z) = 4x + 2y = 0$ $\quad x = -1$

$f_y(x,y,z) = 4y + 2x - 2z - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2$

$f_z(x,y,z) = 2z - 2y = 0$ $\quad z = 2$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det A_1 = 4 > 0$

$\det A_2 = 12 > 0$

$\det A_3 = \det A$

$32 - 8 - 16 = 8 > 0$

Beispiel

$f(x, y) = xy^2(x + y - 2)$

$f_x = y^2(2x + y - 2)$

$f_y = xy(2x + 3y - 4)$

$\nabla f = \vec{0}$

$y = 0$, x beliebig oder

$x = 0$, $y = 2$ oder

$x = \frac{1}{2}$, $y = 1$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & y(4x + 3y - 4) \\ y(4x + 3y - 4) & 2x(x + 3y - 2) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$ac - b^2 > 0$, $a > 0$ $\Rightarrow$ pos. def.

$ac - b^2 > 0$, $a < 0$ $\Rightarrow$ neg. def.

$ac - b^2 < 0$ $\Rightarrow$ indefinit.

Beispiel

$$f(x,y) = xy^2(x+y-2)$$

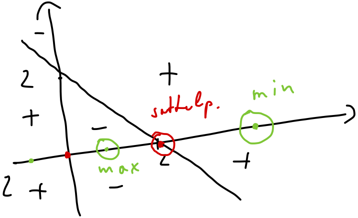
$H_f(0,2) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad ac - b^2 = -16 < 0 \Rightarrow$ indefinit

$\Rightarrow$ Sattelpunkt in $(0,2)$

$H_f(\tfrac{1}{2},1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \tfrac{3}{2} \end{pmatrix}$ $\quad ac - b^2 = 2 > 0,\ a = 2 > 0 \Rightarrow$ pos. def.

$\Rightarrow$ Lokales Min. in $(\tfrac{1}{2},1)$

$\det H_f(x,0) = 0$



$f(x,0) = 0$

$(x,0)$: min. für $x < 0$ und $x > 2$

max für $0 < x < 2$

Sattelpunkt für $x = 0$, $x = 2$