Gegeben:

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

D kompakt

Gesucht:

$\vec{a}$ mit $f(\vec{a}) = \max_{\vec{x}\in D} f(\vec{x})$ bzw.

$\vec{b}$ mit $f(\vec{b}) = \min_{\vec{x}\in D} f(\vec{x})$

möglicher Lösungsweg

1. Bestimme Kandidaten im Inneren:
   Löse $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$ und prüfe, welche Lösungen im Inneren von D liegen
2. Bestimme Kandidaten am Rand:
   stark abhängig von D bzw. dem Rand von D
3. Vergleiche Funktionswerte aller gefundenen Kandidaten

Gegeben:

(stetige) Funktionen $f, g_1, g_2, \dots g_m$ von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$

Aufgabe:

Maximiere/minimiere $f(\vec{x})$

unter den Nebenbedingungen $g_1(\vec{x}) = 0, \dots, g_m(\vec{x}) = 0$

Anders gesagt:

Bestimme die Extrema von f auf der Menge $D = \{\vec{x} \mid g_1(\vec{x}) = 0, \dots, g_m(\vec{x}) = 0\}$

Lösungsstrategien:

1. Explizit: Drücke eine Variable durch die anderen aus
2. Parametrisieren der Nebenbedingungen: Drücke die Menge, die durch die Nebenbedingungen definiert wird durch Parameter aus
3. Lagrange-Multiplikatoren (siehe später)

Beispiel: Explizite Methode

Bestimmen Sie die wärmsten/kühlsten Punkte auf der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ bezüglich der Temperaturverteilung $T(x, y, z) = xz + yz$.

$$z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2} \qquad T(x,y,z) = T(-x,-y,-z)$$

$$\max/\min \quad T(x,y) = x\sqrt{1-x^2-y^2} + y\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$T_x = \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{2(x^2+xy)}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0$$

$$T_y = \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{2(y^2+xy)}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0$$

$$1 - x^2 - y^2 = x^2 + xy = y^2 + xy$$

$$\Rightarrow 1 - xy = 2x^2 + y^2 = 2y^2 + x^2$$

$x^2 = y^2 \Rightarrow$ $x = y$ oder $x = -y$

$4y^2 = 1 \Rightarrow x = y = \pm \frac{1}{2}$

$(2y^2 = 1)$

$\pm\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\pm\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$T(x, y, 0) \equiv 0$$

$$T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Beispiel: Parametrisieren der Nebenbedingung

Bestimmen Sie das Maximum von $f(x,y) = x^2 - 8x + y^2 + 30$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$

$x(t) = \cos t$

$y(t) = \sin t$ $\qquad 0 \le t \le 2\pi$

$g(t) = f(x(t), y(t)) = (\cos t)^2 - 8\cos t + (\sin t)^2 + 30$

$= -8\cos t + 31$

$g'(t) = 8\sin t \overset{!}{=} 0 \Rightarrow t = 0, \; t = \pi$

$g(0) = \cancel{8}\, 23 = f(1,0) \rightarrow \min$

$g(\pi) = \cancel{20}\, 39 = f(-1,0) \rightarrow \max$

Häufig auftretende Parametrisierungen:

Polarkoordinaten: $x = r\cos t,\ y = r\sin t$

Kugelkoordinaten: $x = r\cos t_1 \cos t_2,\ y = r\cos t_1 \sin t_2,\ z = r\sin t_1$

$x = t,\ y = f(t)$ (bzw. allgemeiner: $x_i = t,\ x_j = f_j(t)$ für $j \neq i$)

Satz

Seien $f, g\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar. Falls* $\vec{a} \in D$ *eine Lösung von*

$$\text{“Maximiere/Minimiere } f(\vec{x}) \text{ unter der Nebenbedingung } g(\vec{x}) = 0\text{”}$$

ist, dann gibt es eine Zahl $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ *mit*

$$\nabla f(\vec{a}) + \lambda_1 \nabla g(\vec{a}) = \vec{0}.$$

Wir nennen λ_1 *Lagrange-Multiplikator.*

Aufgabe

Maximiere/Minimiere $f(\vec{x})$ unter der Nebenbedingung $g(\vec{x}) = 0$.

Lösungsweg (Lagrange-Multiplikator)

1. Definiere die Lagrange-Funktion $L(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) + \lambda \cdot g(\vec{x})$ in den $n + 1$ Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda$

$$L_\lambda(\vec{x}, \lambda) = g(\vec{x}) = 0$$

2. Löse $\nabla L(\vec{x}, \lambda) = 0$

$$\begin{pmatrix} L_{x_1} \\ \vdots \\ L_{x_n} \end{pmatrix} (\vec{x}, \lambda) = \nabla f(\vec{x}) + \lambda \nabla g(\vec{x})$$

3. Setze stationäre Punkte in f ein

Beispiel

Bestimme das Volumen des größten Quaders mit achsenparallelen Kanten innerhalb des Ellipsoids, das durch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ beschrieben wird.

$$\max \underbrace{(2x)\cdot(2y)\cdot(2z)}_{f(x,y,z)} \quad \text{unter NB} \quad \underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1}_{g(x,y,z)} = 0$$

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda \cdot g(x,y,z)$$

$$= 8xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$

$$L_x = 8yz + \frac{2\lambda x}{a^2} \qquad L_z = 8xy + \frac{2\lambda z}{c^2}$$

$$L_y = 8xz + \frac{2\lambda y}{b^2} \qquad L_\lambda = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

$$L_x = 0 = 8yz + \frac{2\lambda x}{a^2} \Rightarrow 0 = 4xyz + \frac{\lambda x^2}{a^2} \Rightarrow \frac{\lambda x^2}{a^2} = -4xyz$$

$$-4xyz = \frac{\lambda x^2}{a^2} = \frac{\lambda y^2}{b^2} = \frac{\lambda z^2}{c^2}$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } y = 0 \text{ oder } z = 0 \Rightarrow f(x, y, z) = 0$$

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \Rightarrow \frac{3x^2}{a^2} = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

$$\max f(x) = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{9} \, a \cdot b \cdot c$$

Satz

Seien $f, g_1, g_2, \dots, g_m \colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar. Ist* $\vec{a} \in D$ *eine Lösung von*

"Maximiere/Minimiere $f(\vec{x})$ *unter den Nebenbedingungen* $g_1(\vec{x}) = 0, \dots, g_m(\vec{x}) = 0$*"*

mit linear unabhängigen Gradienten $\nabla g_1(\vec{a}), \dots, \nabla g_m(\vec{a})$*, so gibt es* $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ *mit*

$$\nabla f(\vec{a}) + \lambda_1 \nabla g_1(\vec{a}) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(\vec{a}) = \vec{0}.$$

$$L(\vec{x}, \lambda_1 \dots \lambda_m) = f(\vec{x}) + \lambda_1 g_1(\vec{x}) + \lambda_2 g_2(\vec{x}) + \dots + \lambda_m g_m(\vec{x})$$

Beispiel

Maximiere $f(x, y, z) = xyz$ unter den Nebenbedingungen $x + y + z = 5$ und $xy + yz + xz = 8$

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xyz + \lambda_1 (x + y + z - 5) + \lambda_2 (xy + yz + xz - 8)$$

$$L_x = yz + \lambda_1 + (y + z)\lambda_2 = 0$$

$$L_y = xz + \lambda_1 + (x + z)\lambda_2 = 0$$

$$L_z = xy + \lambda_1 + (x + y)\lambda_2 = 0$$

$$L_{\lambda_1} = x + y + z - 5 = 0$$

$$L_{\lambda_2} = xy + yz + xz - 8 = 0$$

$$L_x - L_y = (y - x)(z + \lambda_2) = 0$$

$$L_x - L_z = (z - x)(y + \lambda_2) = 0$$

$$(x - y)(z - y)(x - z) = 0$$

$$x = y \Rightarrow 2x + z = 5 \Rightarrow z = 5 - 2x$$

$$x(x + 2z) = 8$$

$$3x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{6}$$

$$(2,2,1), (2,1,2), (1,2,2) \quad f(\vec{x}) = 4 \rightsquigarrow \min$$

$$\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{2}\right) \quad f(\vec{x}) = \frac{112}{27} \rightsquigarrow \max$$

Beispiel

Maximiere $z + \frac{x+y}{4}$ unter den Bedingungen $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ und $x^2 + y^2 + 4(z-1)^2 = 4$

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = z + \frac{x+y}{4} + \lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2 - 4) + \lambda_2 (x^2 + y^2 + 4(z-1)^2 - 4)$$

$$L_x = \frac{1}{4} + 2x\lambda_1 + 2x\lambda_2$$

$$L_y = \frac{1}{4} + 2y\lambda_1 + 2y \cdot \lambda_2$$

$$L_z = 1 + 2z\lambda_1 + 8(z-1) \cdot \lambda_2$$

$$L_{\lambda_1} = x^2 + y^2 + z^2 - 4$$

$$L_{\lambda_2} = x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 4$$

$$x = y = -\frac{4}{3}, \quad z = \frac{2}{3}$$

$$x = y = \frac{4}{3}, \quad z = \frac{2}{3}$$

$$f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

$$f(0, 0, 2) = 2 > \frac{5}{3}$$