Beispiel: Parametrisieren der Nebenbedingung

Bestimmen Sie das Maximum von $f(x,y) = x^2 - 8x + y^2 + 30$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$

$x(t) = \cos t$

$y(t) = \sin t$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$g(t) = f(x(t), y(t)) = (\cos t)^2 - 8\cos t + (\sin t)^2 + 30$

$= -8\cos t + 31$

$g'(t) = 8\sin t \overset{!}{=} 0 \Rightarrow t = 0, \; t = \pi$

$g(0) = \cancel{8}\, 23 = f(1,0) \rightarrow \min$

$g(\pi) = \cancel{39}\, 39 = f(-1,0) \rightarrow \max$

Aufgabe

Maximiere/Minimiere $f(\vec{x})$ unter den Nebenbedingungen $g_1(\vec{x}) = 0$, ..., $g_m(\vec{x}) = 0$.

Lösungsweg (Lagrange-Multiplikator)

1. Definiere die Lagrange-Funktion $L(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) + \lambda_1 \cdot g_1(\vec{x}) + \cdots + \lambda_m \cdot g_1(\vec{x})$ in den $n + m$ Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$
2. Löse $\nabla L(\vec{x}, \lambda) = 0$
3. Setze stationäre Punkte in f ein

Beispiel

Maximiere $f(x, y) = x + y$ unter der Nebenbedingung $xy = 1$

Explizit: $y = \frac{1}{x} \Rightarrow \max f(x) = x + \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to \infty} x + \frac{1}{x} = \infty \Rightarrow \text{max existiert nicht.}$$

Lagrange-Multiplikator: $L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(xy - 1)$

$$\left.\begin{aligned} L_x &= 1 + \lambda y = 0 \\ L_y &= 1 + \lambda x = 0 \end{aligned}\right\} \quad x \neq 0, \; x = y$$

$$L_\lambda = xy - 1 = 0 \qquad x = y = \pm 1$$

Differenzieren von Vektorfeldern

Definition

Sei $\vec{f}\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ein Vektorfeld,

$$\vec{f}(x_1,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ f_2(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix}$$

Dann heißt f partiell differenzierbar/ stetig differenzierbar/total differenzierbar, wenn alle Koordinatenfunktionen die entsprechende Eigenschaft haben.

Sei $\vec{x}$ ein innerer Punkt von D und $\vec{f}$ in $\vec{x}$ total differenzierbar

Wir definieren wir die Jacobimatrix oder Funktionalmatrix durch

$$J_{\vec{f}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{x})^t \\ \vdots \\ \nabla f_m(\vec{x})^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Beobachtung

$\vec{f}$ ist in $\vec{x}$ genau dann total differenzierbar, wenn eine $(m \times n)$-Matrix J existiert, sodass

$$\vec{f}(\vec{x} + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}) + J\vec{h} + \vec{\epsilon}(\vec{h}) \qquad \text{mit} \qquad \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\vec{\epsilon}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$$

(und es gilt $J = J_{\vec{f}}(\vec{x})$)

Beispiel (affine Abbildung)

$\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

$$f(x_1 \dots x_n) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n + b_m \end{pmatrix}$$

$$J_{\vec{f}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A$$

Beispiel (zentrales Kraftfeld)

$\mathbf{K}(\vec{x}) = -\frac{c}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \vec{x}$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x} \neq \vec{0}$

$$K_1(x_1, x_2, x_3) = -\frac{c\, x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial x_1} = -\frac{c}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} + \frac{3}{2} \frac{c\, x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \cdot 2 x_1$$

$$\frac{\partial k_1}{\partial x_2} = \frac{3 c\, x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}}$$

$$J_K(\vec{x}) = \frac{c}{\|\vec{x}\|^5} \begin{pmatrix} \|\vec{x}\|^2 - 3x_1^2 & -3x_1x_2 & -3x_1x_3 \\ -3x_1x_2 & \|\vec{x}\|^2 - 3x_2^2 & -3x_2x_3 \\ -3x_1x_3 & -3x_2x_3 & \|\vec{x}\|^2 - 3x_3^2 \end{pmatrix}$$

Beispiel (magnetischer Wirbel)

$$\mathbf{H}(\vec{x}) = \frac{c}{x_1^2+x_2^2} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

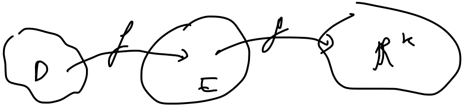
$$H_1(\vec{x}) = \frac{-c\, x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1} = \frac{c\, x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \cdot 2 \cdot x_1$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_2} = -\frac{c}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{c\, x_2}{(x_1^2 + x_2^2)} \cdot 2 \cdot x_2$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_3} = 0$$

$$J_H(\vec{x}) = \frac{c}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \begin{pmatrix} 2 x_1 x_2 & x_2^2 - x_1^2 & 0 \\ x_2^2 - x_1^2 & -2 x_1 x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Satz

Sei $\vec{f}\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to E \subseteq \mathbb{R}^m$ *im inneren Punkt* $\vec{a} \in D$ *total differenzierbar und* $\vec{g}\colon E \to \mathbb{R}^k$ *im inneren Punkt* $\vec{f}(\vec{a}) \in E$ *total differenzierbar, dann ist auch die Funktion*

$$\vec{h}\colon D \to \mathbb{R}^k, \qquad \vec{h}(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$$

total differenzierbar in $\vec{a}$, *und es gilt*

$$J_{\vec{h}}(\vec{a}) = J_{\vec{g}}\left(\vec{f}(\vec{a})\right) J_{\vec{f}}(\vec{a})$$

Beispiel

$$\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{g}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1^2 + y_2^2 \\ \arctan(y_2/y_1) \end{pmatrix} \quad h(\vec{x}) = g \circ f(\vec{x}) = g(f(x))$$

$$J_{\vec{f}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad J_{\vec{g}}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2y_1 & 2y_2 \\ -\frac{y_2}{y_1^2 + y_2^2} & \frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2} \end{pmatrix}$$

$$J_{\vec{h}}(x_1, x_2) = J_{\vec{g}}\left(\vec{f}(x_1, x_2)\right) \cdot J_{\vec{f}}(x_1, x_2) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2(2x_1 + 3x_2) & 2(4x_1 - x_2) \\ \frac{x_2 - 4x_1}{20x_1^2 + 4x_1x_2 + 10x_2^2} & \frac{2x_1 + 3x_2}{20x_1^2 + 4x_1x_2 + 10x_2^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 40x_1 + 4x_2 & 4x_1 + 20x_2 \\ \frac{14x_2}{20x_1^2 + 4x_1x_2 + 10x_2^2} & \frac{-14x_1}{20x_1^2 + 4x_1x_2 + 10x_2^2} \end{pmatrix}$$

Betrachte den ∇-Operator als Vektor, also

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad \text{Multiplikation mit ``Skalar'':}\ \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f \end{pmatrix}$$

Sei $\vec{F} \colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, dann definieren wir die Divergenz von $\vec{F}$ durch

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla F := \langle \nabla, \vec{F} \rangle = \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} f_2 + \dots \frac{\partial}{\partial x_n} f_n$$

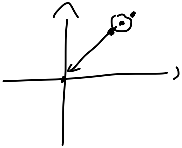
Interpretation von $\operatorname{div} \vec{F}$:

Die Divergenz beschreibt die Änderung des Massenflusses pro Volums- und Zeiteinheit im Punkt $\vec{x}$:

- $\operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) > 0$: "Quelle" in $\vec{x}$
- $\operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) < 0$: "Senke" in $\vec{x}$
- $\operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) = 0$ für alle $\vec{x}$: das Feld ist "quellenfrei"

Beispiel

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$



$$\nabla \vec{f}(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1 - 1 = -2$$

Beobachtung

für eine skalare Funktion ist $\nabla f = \operatorname{grad} f$ ein Vektorfeld

für ein Vektorfeld $\vec{F}$ ist $\nabla \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F}$ eine skalare Funktion

Definiere den Laplace-Operator Δ angewandt auf eine skalare Funktion f durch

$$\Delta f := \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f$$

Im dreidimensionalen Raum haben wir auch ein äußeres Produkt definiert:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Wir definieren die Rotation eines Vektorfeldes $\vec{F}\colon D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\operatorname{rot} \vec{F} := \nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Interpretation von $\operatorname{rot} \vec{F}$:

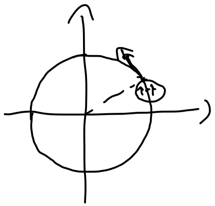
Interpretiert man $\vec{F}$ als Strömungsfeld, so beschreibt die Rotation die Wirbel in dieser Strömung:

- $\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x}) \neq 0$: "Wirbel" mit Zentrum $\vec{x}$ um die Achse mit Richtungsvektor $\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x})$
- $\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x}) = 0$ für alle $\vec{x}$: das Feld ist "wirbelfrei"

Beispiel

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Ein Vektorfeld $\vec{F}\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Potentialfeld, wenn

$$\vec{F} = \nabla f$$

für eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$

Satz

Potentialfelder im $\mathbb{R}^3$ sind wirbelfrei, also $\operatorname{rot} \nabla f = \vec{0}$

Rechenregeln im $\mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{F})) = 0$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \Delta f$$

$$\operatorname{div}(f \cdot \vec{F}) = \langle \operatorname{grad} f, \vec{F} \rangle + f \cdot \operatorname{div} \vec{F}$$

$$\operatorname{rot}(f \cdot \vec{F}) = \operatorname{grad} f \times \vec{F} + f \cdot \operatorname{rot} \vec{F}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \Delta \vec{F}$$

Maxwell-Gleichungen

Elektrische Feldstärke $\mathbf{E}(\vec{x}, t)$ und magnetische Feldstärke $\mathbf{H}(\vec{x}, t)$ erfüllen

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E} \qquad \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = + \operatorname{rot} \mathbf{H} \qquad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \qquad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

$$\mu_0 \operatorname{rot} \frac{\partial H}{\partial t} = -\operatorname{rot}(\operatorname{rot} E) = -\operatorname{grad}(\operatorname{div} E) + \Delta E = \Delta E$$

$$\underline{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E}{\partial t}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot \operatorname{rot} H = \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{rot} \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right) = \underline{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \Delta E}$$

Maxwell-Gleichungen

Elektrische Feldstärke $\mathbf{E}(\vec{x}, t)$ und magnetische Feldstärke $\mathbf{H}(\vec{x}, t)$ erfüllen

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E} \qquad \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{H} \qquad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \qquad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

Mittels der Rechenregeln für $\operatorname{div}, \operatorname{grad}, \operatorname{rot}$ erhalten wir die Wellengleichungen

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta \mathbf{E} \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta \mathbf{H}$$