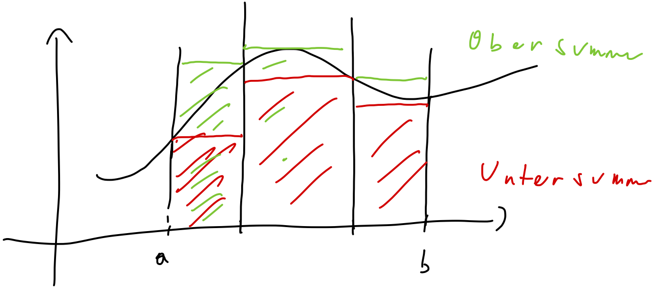
Integration von Funktionen in mehreren Variablen

Erinnerung

Integration in einer Variablen:
Fläche unter dem Funktionsgraphen als Grenzwert von Ober- und Untersummen

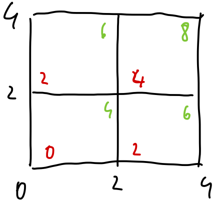


Erinnerung

Integration in einer Variablen:
Fläche unter dem Funktionsgraphen als Grenzwert von Ober- und Untersummen

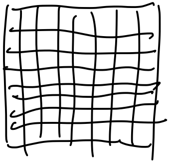
Intuition für 2 Variable: Volumen unter dem Funktionsgraphen einer Funktion $f(x, y)$

$f(x,y) = x + y \qquad D = \{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq 4, \ 0 \leq y \leq 4 \}$



D

$U = 0 + 8 + 8 + 16$
$= 32$



Definition

Ein n-dimensionales Parallelepiped ist eine Menge der Form

$$
\begin{aligned}
Q &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \\
&= \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \text{ für alle } i\}
\end{aligned}
$$

Der Inhalt eines Parallelepipeds ist

$$\operatorname{Inh} Q = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

$n = 1$

Q ... Intervall $[a_1, b_1]$

$\operatorname{Inh} Q =$ Länge d. Int.

$n = 2$

Q .. Rechteck

$\operatorname{Inh} Q =$ Fläche

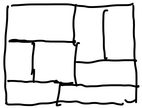
$n = 3$

Q .. Quader

$\operatorname{Inh} Q =$ Volumen

Wie in einer Variable: $f : Q \to \mathbb{R}$

- betrachte Zerlegung Z von Q in kleinere Parallelepipede Q_k, die nur Seitenflächen gemeinsam haben



- Definiere

$$m_k = \inf\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in Q_k\} \quad \text{und} \quad M_k = \sup\{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in Q_k\}$$

- definiere die Unter- und Obersummen durch

$$U(Z, f) = \sum_{k=1}^{l} m_k \operatorname{Inh} Q_k \quad \text{und} \quad O(Z, f) = \sum_{k=1}^{l} M_k \operatorname{Inh} Q_k$$

Definition

Eine beschränkte Funktion f heißt integrierbar auf Q, wenn

$$\sup_Z U(Z,f) = \inf_Z O(Z,f)$$

wobei Supremum und Infimum über alle Zerlegungen genommen werden.

Der gemeinsame Wert von Supremum und Infimum heißt Integral, wir schreiben dafür

$$\int_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} \quad \textit{oder} \quad \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n \ldots dx_1$$

Satz A

Ist f stetig auf Q, so kann man das Integral durch n sukzessive Integrationen nach den Variablen $x_1, \dots x_n$ berechnen:

$$\int_Q f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_n \right) \dots dx_2 \right) dx_1$$

Es kann auch in einer beliebigen anderen Reihenfolge integriert werden.

Bemerkung:
somit lassen sich Eigenschaften von Integralen in einer Variablen verallgemeinern, zum Beispiel

$\int_Q c \cdot f(\vec{x})\, d\vec{x} = c \cdot \int_Q f(\vec{x})\, d\vec{x}$,

$\int_Q f(\vec{x}) + g(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_Q f(\vec{x})\, d\vec{x} + \int_Q g(\vec{x})\, d\vec{x}$

2-dimensionaler Fall:
$Q = [a, b] \times [c, d]$, $f\colon Q \to \mathbb{R}$

Betrachte die Funktionen

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy \quad \text{und} \quad G(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

Wenn f auf Q stetig ist, dann ist F stetig auf $[a, b]$ und G stetig auf $[c, d]$ und es gilt

$$\int_Q f(x, y)\, d(x, y) = \int_a^b F(x)\, dx = \int_c^d G(y)\, dy$$

Beispiel

$f(x, y) = x + xy^2 - y$ auf $Q = [-1, 1]^2 = [-1, 1] \times [-1, 1]$

$$\int_Q f(x,y)\, d(x,y)$$

$$F(x) = \int_{-1}^{1} f(x,y)\, dy = \int_{-1}^{1} x + xy^2 - y\, dy$$

$$= \left(xy + \frac{1}{3} x y^3 - \frac{1}{2} y^2\right) \Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3} x$$

$$\int_Q f(x,y)\, d(x,y) = \int_{-1}^{1} F(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{8}{3} x\, dx = \left(\frac{4}{3} x^2\right) \Big|_{-1}^{1} = 0$$

Beispiel

$f(x,y) = \frac{1}{1+(x+y)^2}$ auf $Q = [0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$

$$G(y) = \int_0^1 \frac{1}{1+(x+y)^2}\, dx \qquad \text{subst.: } u = x+y, \quad du = dx$$

$$= \int_{0+y}^{1+y} \frac{1}{1+u^2}\, du$$

$$= \arctan u \Big|_{y}^{y+1} = \arctan(y+1) - \arctan y$$

$$\int_Q f(x,y)\, d(x,y) = \int_0^1 G(y)\, dy = \underbrace{\int_0^1 \arctan(y+1)\, dy}_{\int_1^2 \arctan y\, dy} - \int_0^1 \arctan y$$

$$\int 1 \cdot \arctan y \, dy = y \cdot \arctan y - \int y \cdot \frac{1}{1+y^2} \, dy \qquad \text{subst.: } t = y^2+1$$

$$dt = 2y\,dy$$

$$= y \cdot \arctan y - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \, dt$$

$$= y \cdot \arctan y - \frac{1}{2} \ln t = y \arctan y - \ln \sqrt{y^2+1} + C$$

$$\int_0^1 G(y) \, dy = \left(y \cdot \arctan y - \ln \sqrt{y^2+1} \right) \Big|_1^2 - \left(y \cdot \arctan y - \ln \sqrt{y^2+1} \right) \Big|_0^1$$

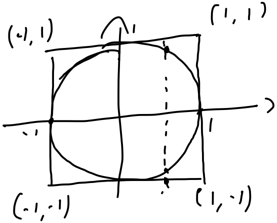
$$= 2 \arctan 2 - \frac{\pi}{2} - \ln \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Beispiel

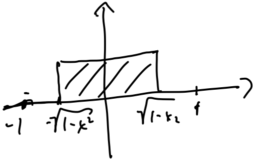
Fläche des Einheitskreises $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

$$Q = [-1,1]^2$$



$$F(x) = \int_{-1}^{1} f(x,y)\, dy = 2\sqrt{1-x^2}$$



$$\int_Q f(x,y)\, d(x,y) = \int_{-1}^{1} F(x)\, dx$$

$$= 2\int_0^1 2 \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx$$

subst. $x = \sin t$

$dx = \cos t \, dt$

$$4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \, dt$$

$$I = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos t$$

$$= \underbrace{4 \cdot \sin t \cos t}_{0} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt$$

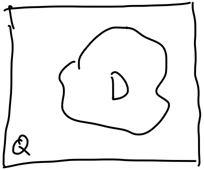
$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt$$

$$I = 4 \frac{\pi}{2} - I$$

$$\Rightarrow 2I = 2\pi$$

$$I = \pi$$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, Q Parallelepiped mit $D \subseteq Q$, $f : D \to \mathbb{R}$ beschränkt.



Die charakteristische Funktion oder Indikatorfunktion von D ist

$$\mathbf{1}_D(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in D \\ 0, & \vec{x} \notin D \end{cases}$$

D heißt messbar, wenn $\mathbf{1}_D$ auf Q integrierbar ist. Der Inhalt von D ist dann

$$\operatorname{Inh} D = \int_Q \mathbf{1}_D(\vec{x})\, d\vec{x}$$

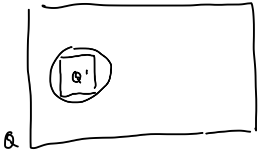
f heißt integrierbar auf D, wenn $f \cdot \mathbf{1}_D$ integrierbar auf Q ist. Wie definieren

$$\int_D f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_Q f(\vec{x}) \cdot \mathbf{1}_D(\vec{x})\, d\vec{x}$$

Definition

Eine ***Nullmenge*** *ist eine beschränkte Menge* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *mit* $\operatorname{Inh} A = 0$.

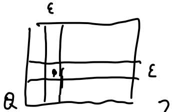
Einheitskreisscheibe:



$U(1_D, Z) \geq \operatorname{Inh} Q' > 0$

$\Rightarrow$ keine Nullmenge!

Isolierter Punkt: $A = \{(x_0, y_0)\}$



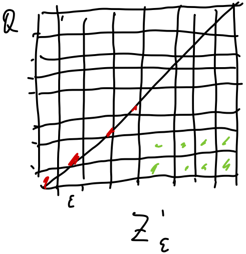
Z_ε

$$O(1_A, Z_\varepsilon) \leq \varepsilon^2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \inf O(1_A, Z) = 0 \\ \sup U(1_A, Z) = 0 \end{array}\right\} \text{Nullmenge}$$

Definition

*Eine **Nullmenge** ist eine beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit* $\operatorname{Inh} A = 0$.

$$A = \{ (x, x) \mid x \in [0,1] \}$$



$$U(\mathbb{1}_A, Z) = 0$$

$$O(\mathbb{1}_A, Z'_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^2 = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \inf_Z O(\mathbb{1}_A, Z) = 0$$

$\Rightarrow$ Nullmenge

Definition

Eine Nullmenge ist eine beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *mit* $\operatorname{Inh} A = 0$.

Satz

Sei $f : [a, b]$ *eine stetige Funktion, dann ist der Graph von* f

$$\{(x, y) \mid x \in [a, b], y = f(x)\}$$

eine Nullmenge in $\mathbb{R}^2$

Definition

Eine Nullmenge ist eine beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *mit* $\operatorname{Inh} A = 0$.

Satz

Sei $f : [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ *eine stetige Funktion, dann ist der Graph von* f

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n], x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

eine Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+1}$

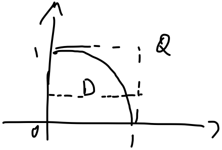
Bemerkung

Satz A gilt sinngemäß auch, wenn die Menge aller Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge ist.

Beispiel

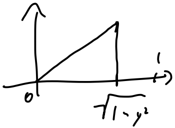
Bestimme das Volumen des Körpers $\{(x,y,z) \mid x,y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq xy\}$

$$\int_D xy \, d(x,y) = \int_Q \mathbb{1}_D \cdot x \cdot y \, d(x,y)$$



$$G(y) = \int_0^1 \mathbb{1}_D \, x \cdot y \, dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x \cdot y \, dx$$



$$= \left(\frac{1}{2} x^2 y\right) \Big|_0^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2}(1-y^2) \cdot y$$

$$\int_D xy \, d(x,y) = \int_0^1 G(y)\, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{y}{2} - \frac{y^3}{2} \, dy$$

$$= \frac{y^2}{4}\Big|_0^1 - \frac{y^4}{\cancel{6}\ 8}\Big|_0^1 = \cancel{\frac{1}{12}} \quad \frac{1}{8}$$

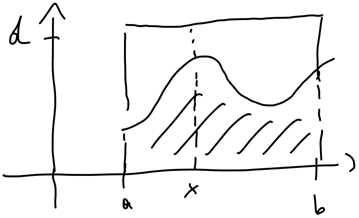
Beispiel: Fläche unter Funktionsgraphen

$g\colon [a,b] \to [0,d]$ stetig, $D = \{(x,y) \mid x \in [a,b], 0 \le y \le g(x)\}$.

$$Q = [a,b] \times [0,d]$$

$$F(x) = \int_0^d 1\!\!1_D(x,y)\,dy$$

$$= g(x)$$



$$\operatorname{Inh} D = \int_Q 1\!\!1_D \, d(x,y)$$

$$= \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$