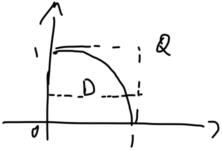
Beispiel

Bestimme das Volumen des Körpers $\{(x, y, z) \mid x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq xy\}$

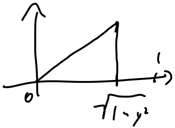
$$\int_D xy \, d(x,y) = \int_Q \mathbb{1}_D \cdot x \cdot y \, d(x,y)$$



$$G(y) = \int_0^1 \mathbb{1}_D \, x \cdot y \, dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x \cdot y \, dx$$

$$= \left(\frac{1}{2} x^2 y\right) \Big|_0^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2}(1-y^2) \cdot y$$



$$\int_D xy \, d(x,y) = \int_0^1 G(y) \, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{y}{2} - \frac{y^3}{2} \, dy$$

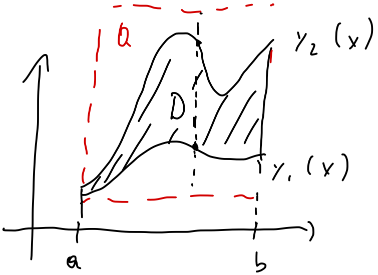
$$= \frac{y^2}{4}\Big|_0^1 - \frac{y^4}{\cancel{6} \; 8}\Big|_0^1 = \cancel{\frac{1}{12}} \quad \frac{1}{8}$$

Gegeben

stetige Funktionen $y_1 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $y_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $y_1(x) \le y_2(x)$ für alle $x \in [a,b]$

$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$

$f \colon D_1 \to \mathbb{R}$ stetig



$$\int_{D_1} f \, dx\, dy = \int_Q \mathbb{1}_{D_1} \cdot f \, dx\, dy$$

$$= \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Gegeben

stetige Funktionen $y_1 \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ und $y_2 \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $y_1(x) \leq y_2(x)$ für alle $x \in [a, b]$

$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$

$f \colon D_1 \to \mathbb{R}$ stetig

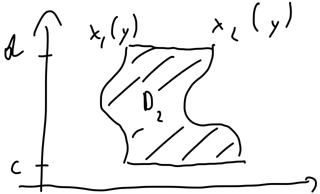
$$\iint_{D_1} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

Gegeben

stetige Funktionen $x_1\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ und $x_2\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ mit $x_1(y) \leq x_2(y)$ für alle $x \in [c,d]$

$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$

$f\colon D_2 \to \mathbb{R}$ stetig



Gegeben

stetige Funktionen $x_1 \colon [c,d] \to \mathbb{R}$ und $x_2 \colon [c,d] \to \mathbb{R}$ mit $x_1(y) \leq x_2(y)$ für alle $x \in [c,d]$

$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$

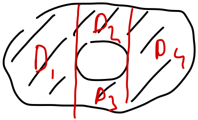
$f \colon D_2 \to \mathbb{R}$ stetig

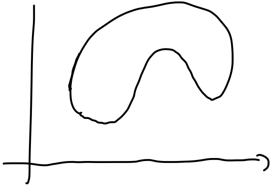
$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Beachte:

- erst innere, dann äußere Integration
- eine Variable über die nicht integriert wird, wird als Konstante angesehen
- Vorgangsweise funktioniert für Integrationsbereiche der Form D_1 oder D_2 wie zuvor beschrieben

  falls D nicht diese Form hat, muss man es in Teilbereiche zerlegen, die diese Form haben

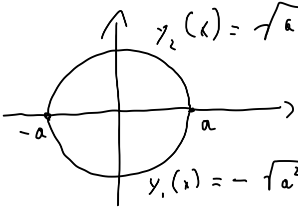




Beispiel: Kreisfläche

$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}, \quad f(x, y) = 1$

$$A = \int_{-a}^{a} \left(\int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} 1 \, dy \right) dx$$



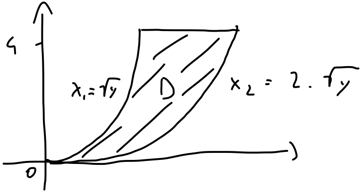
$$= \int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2 - x^2} \, dx$$

subst.: $x = a \cdot \sin t$, $dx = a \cos t \, dt$

$$= a^2 \cdot \pi$$

Beispiel

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 4, \underbrace{\sqrt{y}}_{x_1(y)} \le x \le 2\underbrace{\sqrt{y}}_{x_2(y)}\}, \qquad f(x,y) = 1$$



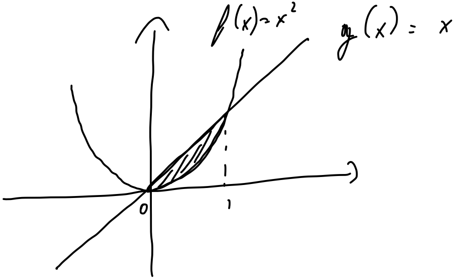
$$A = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} 1 \, dx \, dy$$

$$= \int_0^4 \sqrt{y} \, dy$$

$$= \frac{3}{2} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$$

Beispiel

Bestimme die beschränkte Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$ eingeschlossen wird.



Schnittpunkte:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = x$

$\Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 1$

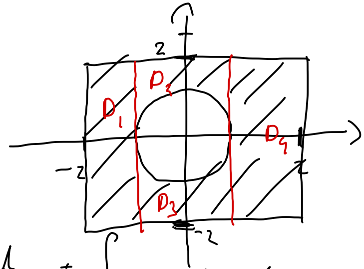
$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} 1 \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 x - x^2 \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

Beispiel

Bestimme die Fläche des Bereiches
$D = \{(x,y,z) \mid |x| \leq 2,\ |y| \leq 2,\ x^2 + y^2 \geq 1\}$



$$\int_D 1 \, dx \, dy =$$

$$= \int_{D_1} 1 \, dx \, dy + \int_{D_2} 1 \, dx \, dy + \int_{D_3} 1 \, dx \, dy + \int_{D_4} 1 \, dx \, dy$$

$$= \int_{-2}^{-1} \int_{-2}^{2} 1 \, dy \, dx + \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{2} 1 \, dy \, dx + \int_{-1}^{1} \int_{-2}^{-\sqrt{1-x^2}} 1 \, dy \, dx + \int_{1}^{2} \int_{-2}^{2} 1 \, dy \, dx$$

$$= 4 + 4 - \frac{\pi}{2} + 4 - \frac{\pi}{2} + 4 = 16 - \pi$$

Gegeben

$D \subseteq \mathbb{R}^3$, stetige Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$

Annahme

$$D = \{(x, y, z) \mid a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x), z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)\}$$

mit stetigen Funktionen y_1, y_2, z_1, z_2

Dann gilt:

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx$$

Wie in 2 Variablen:

- erst innere, dann äußere Integration
- eine Variable über die nicht integriert wird, wird als Konstante angesehen
- Vorgangsweise funktioniert für Integrationsbereiche D wie zuvor beschrieben (bzw mit vertauschter Reihenfolge der Variablen)

  falls D nicht diese Form hat, muss man es in Teilbereiche zerlegen, die diese Form haben

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Körper mit Massedichte $\rho\colon D \to \mathbb{R}$

$$M = \iiint_D \rho(x,y,z)\,d(x,y,z)$$

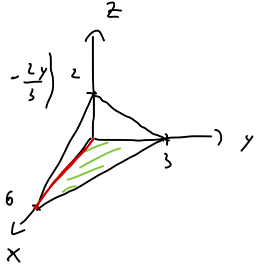
Masse von D

$$x_s = \frac{1}{M}\iiint_D x\rho(x,y,z)\,d(x,y,z)$$
$$y_s = \frac{1}{M}\iiint_D y\rho(x,y,z)\,d(x,y,z)$$
$$z_s = \frac{1}{M}\iiint_D z\rho(x,y,z)\,d(x,y,z)$$

Koordinaten des Schwerpunktes

Beispiel

Schwerpunkt einer Pyramide, begrenzt durch die Koordinatenebenen und die Ebene $x + 2y + 3z = 6$ mit Massedichte $\rho \equiv 1$



$$D = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \le x \le 6,\ 0 \le y \le 3 - \frac{x}{2},\ 0 \le z \le 2 - \frac{x}{3} - \frac{2y}{3} \right\}$$

$$M = \int_D 1 \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_0^6 \int_0^{3-\frac{x}{2}} \int_0^{2-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}} 1 \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_0^6 \int_0^{3-\frac{x}{2}} \left(2 - \frac{x}{3} - \frac{2y}{3}\right) dy \, dx = \int_0^6 \left(2 - \frac{x}{3}\right)\left(3 - \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(3 - \frac{x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \int_0^6 3 - x + \frac{x^2}{12} \, dx = 6$$

$$x_S = \frac{1}{6} \int_0^6 \int_0^{3-\frac{x}{2}} \int_0^{2-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}} x \, dz \, dy \, dx$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^6 \int_0^{3-\frac{x}{2}} x\left(2 - \frac{x}{3} - \frac{2y}{3}\right) dy \, dx$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^6 x \cdot \left(2 - \frac{x}{3}\right)\left(3 - \frac{x}{2}\right) - \frac{x}{3}\left(3 - \frac{x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^6 3x - x^2 + \frac{x^3}{12} \, dx = \frac{3}{2}$$

$$S = (x_S, y_S, z_S) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

Erinnerung (Substitution)

f stetig differenzierbar, g stetig, dann gilt

$$\int g(f(u)) \cdot f'(u)\, du = G(f(u))$$

wobei G die Stammfunktion von g ist.

Insbesondere:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\, dx = \int_a^b g(f(u)) \cdot f'(u)\, du$$

Koordinatentransformation

Gegeben $D \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und messbar, $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig

Gesucht $\int_D f(\vec{x})\, d\vec{x}$

Koordinatentransformation:

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x_1(u_1, \ldots, u_n) \\ \vdots \\ x_n(u_1, \ldots, u_n) \end{pmatrix}$$

$$E = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x}(\vec{u})) \in D\}$$

$\hookrightarrow \vec{x}^{-1}(D)$

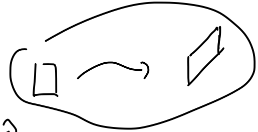
Voraussetzungen

- $\vec{x}(\vec{u})$ ist stetig differenzierbar auf E
- $\vec{x}\colon E \to D$ ist bijektiv
- $\det J_{\vec{x}}(\vec{u}) \neq 0$

$\hookrightarrow$ Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

Substitutionsregel



Unter den Annahmen auf der letzten Folie gilt

$$\begin{aligned}\int_D f(\vec{x})\, d\vec{x} &= \int_E f(\vec{x}(\vec{u}))\, \left|\det J_{\vec{x}}(\vec{u})\right|\, d\vec{u} \\ &= \int_E f(\vec{x}(\vec{u}))\, \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{u}}\right|\, d\vec{u}\end{aligned}$$

Beispiel: Ellipse

$D = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$

Transformation: $x = a \cdot r \cdot \cos\varphi$, $y = b \cdot r \cdot \sin\varphi$ $\quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

$E = \{(r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$

Jacobi det. $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| = \begin{vmatrix} a \cdot \cos\varphi & -a \cdot r \cdot \sin\varphi \\ b \cdot \sin\varphi & b \cdot r \cdot \cos\varphi \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot r$

$\text{Area}(D) = \int_D 1 \, dx \, dy = \int_E \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| dr \, d\varphi$

$= \int_E a \cdot b \cdot r \, dr \, d\varphi = \int_0^1 \int_0^{2\pi} a b r \, d\varphi \, dr = a \cdot b \cdot \pi$

Polarkoordinaten in der Ebene:

$$x(r,\varphi) = r\cos\varphi, \qquad y(r,\varphi) = r\sin\varphi$$

$(r \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} \right| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cdot\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Polarkoordinaten in der Ebene:

$$x(r,\varphi) = r\cos\varphi, \qquad y(r,\varphi) = r\sin\varphi, \qquad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| = r$$

$(r \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

Kugelkoordinaten im Raum:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \qquad y = r\sin\varphi\sin\theta, \qquad z = r\cos\theta, \qquad \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right| = r^2\sin\theta$$

$(r \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi)$

Beispiel

Schwerpunkt der von der Kardioide $r(\varphi) = 1 + \cos\varphi$ (in Polarkoordinaten) eingeschlossenen Fläche bei konstanter Massendichte $\rho \equiv 1$

$$D = \{ (x,y) \mid 0 \le r(x,y) \le 1 + \cos \varphi(x,y) \}$$

$$E = \{ (r,\varphi) \mid 0 \le r \le 1 + \cos\varphi \, , \, 0 \le \varphi \le 2\pi \}$$

$$M = \int_D 1 \, dx \, dy$$

$$= \int_E \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} \right| dr \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\varphi} r \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos\varphi)^2 \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \cos\varphi + \frac{1}{2} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{3\pi}{2}$$

$$\underline{\int \cos^2 t \, dt} = \sin t \cos t + \int \sin^2 t \, dt$$

$$= \sin t \cos t + \int 1 \, dt - \underline{\int \cos^2 t \, dt}$$

$$x_s = \frac{1}{M} \cdot \int_D x \, dx \, dy$$

$$= \frac{2}{3\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\varphi} r^2 \cdot \cos\varphi \, dr \, d\varphi$$

$$= \frac{5}{6}$$

$$y_s = \frac{1}{M} \int_D y \, dx \, dy$$

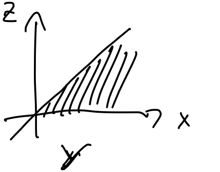
$$= \frac{2}{3\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\varphi} r^2 \cdot \sin\varphi \, dr \, d\varphi$$

$$= 0$$

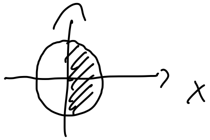
Beispiel

Schwerpunkt des Körpers im oberen Halbraum, der vom Zylinder $x^2 + y^2 = a^2$, und den Ebenen $z = 0$ und $z = x$ beschränkt wird (bei konstanter Massendichte $\rho \equiv 1$).

Grundfläche: $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le a^2,\ x \ge 0\} =: B$



$D = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in B,\ \underbrace{0}_{z_1(x,y)} \le z \le \underbrace{x}_{z_2(x,y)}\}$



$M = \int_D 1 \, dz\, dy\, dx = \int_B \left(\int_0^x 1 \, dz \right) dy\, dx$

$= \int_B x \, dy\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^2 \cdot \cos\varphi \, dr\, d\varphi = \frac{2a^3}{3}$

$$x_s = \frac{3}{2a^3}\int_D x \, dz\, dy\, dx = \frac{3}{2a^3}\int_B \left(\int_0^x x\, dz\right) dx\, dy =$$

$$= \frac{3}{2a^3}\int_B x^2\, dy\, dx = \frac{3}{2a^3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^3 \cdot \cos^2 y\, dr\, dy = \frac{3\pi}{8}\cdot a$$

$$y_s = \frac{3}{2a^3}\int_D y\, dz\, dy\, dx = \frac{3}{2a^3}\int_B x\cdot y\, dx\, dy = \frac{3}{2a^3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^3 \sin y \cos y\, dr\, dy$$

$$= 0$$

$$z_s = \frac{3}{2a^3}\int_D z\, dz\, dy\, dx = \frac{3}{2a^3}\int_B \left(\int_0^x z\, dz\right) dy\, dx = \frac{3}{2a^3}\int_B \frac{x^2}{2}\, dy\, dx$$

$$= \frac{x_s}{2} = \frac{3\pi \cdot a}{16}$$

$$S = \frac{3\pi a}{16}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = I$

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

subst.: $x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$D = \mathbb{R}^2, \quad E = \{(r,\varphi) \mid 0 \le r \le \infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r\, dr\, d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r \cdot dr\right) d\varphi \qquad \text{subst.}: t = r^2 \;,\; dt = 2r\, dr$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-t}\, dt\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = \pi$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

Trägheitsmoment einer Kugel

$T_z = \iiint_K (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$K = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$, $\rho \equiv 1$

Kugelkoord.

$$x = r\cos\varphi\sin\theta \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$
$$z = r\cos\theta$$

$$T_z = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta\right) r^2\sin\theta \, d\theta\, d\varphi\, dr$$
$$= \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^4\sin^3\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$$
$$= \left(\int_0^R r^4\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi} 1\, d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta\right) = \frac{R^5}{5}\cdot 2\pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{8R^5\pi}{15}$$

Trägheitsmoment einer Kugel

$T_y = \iiint_K (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

$K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$, $\rho \equiv 1$

$x = r \cos\varphi \sin\theta$

$y = r \cdot \cos\theta$

$z = r \cdot \sin\varphi \sin\theta$

$$\Rightarrow \quad T_y = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^4 \sin^3\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr = \frac{8 R^5 \pi}{15}$$