Sei $\vec{x}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^d$ eine stückweise glatte Kurve mit Graph

$$C = \{\vec{x}(t) \mid t \in [a, b]\}$$

Parametrisiere C nach der Bogenlänge:

$$s(t) = \int_a^t \|\dot{\vec{x}}(t)\| \, dt$$

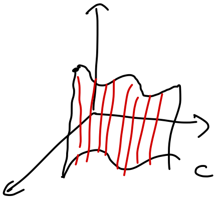
Notation

Schreibe $t(s)$ für die Umkehrfunktion $[0, L] \to [a, b]$ (wobei $L = s(b)$ die Länge der Kurve ist)

Schreibe $\vec{x}(s)$ für $\vec{x}(t(s))$

Gegeben

$f\colon D \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ stetig,
Kurve $\vec{x}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^d$ mit Graph $C \subsetneq D$



Definiere das Kurvenintegral

$$\int_C f\, ds := \int_a^b f(\vec{x}(t))\|\dot{\vec{x}}(t)\|\, dt$$
$$= \int_0^L f(\vec{x}(s))\, ds$$

Wenn die Kurve geschlossen ist (also $\vec{x}(a) = \vec{x}(b)$), schreiben wir

$$\oint_C f\, ds$$

Beispiel

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}, 0 \le t \le 2\pi \qquad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \sin t + e^t \cos t \end{pmatrix}$$

$$\|\dot{\vec{x}}(t)\| = \left(\left(e^{2t}\underline{\cos^2 t} - \cancel{2e^{2t}\cos t \sin t} + e^{2t}\underline{\sin^2 t}\right) + \left(e^{2t}\underline{\sin^2 t} + \cancel{2e^{2t}\sin t\cos t} + e^{2t}\underline{\cos^2 t}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2} \cdot e^t$$

$$\int_C f \, ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2t}\underline{\cos^2 t} + e^{2t}\underline{\sin^2 t}} \cdot \sqrt{2} \cdot e^t \, dt$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} e^{2t} \, dt = \sqrt{2} \left.\frac{e^{2t}}{2}\right|_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^{4\pi} - 1\right)$$

Gegeben
$\vec{F}\colon D \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig,
Kurve $\vec{x}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^d$ mit Graph $C \subseteq D$

Definiere das Kurvenintegral

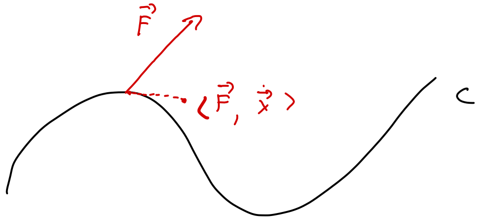
$$\int_C \vec{F}\, ds := \int_a^b \left\langle \vec{F}(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \right\rangle\, dt$$

Wenn die Kurve geschlossen ist, schreiben wir wieder

$$\oint_C \vec{F}\, ds$$

Bemerkungen

- Physikalische Interpretation: Arbeit entlang des Weges C im Kraftfeld $\vec{F}$



Bemerkungen

- Physikalische Interpretation: Arbeit entlang des Weges C im Kraftfeld $\vec{F}$
- Verschiedene Parametrisierungen der selben Kurve ergeben den selben Wert für das Kurvenintegral
- Verschiedene Wege mit gleichen Endpunkten ergeben im allgemeinen unterschiedliche Werte

  konservatives Vektorfeld

  Ausnahme: $\vec{F}$ ist ein Potentialfeld, d.h. $\vec{F} = \nabla f$ für eine differenzierbare Funktion f, dann gilt

$$\int_C \nabla f \, ds = f(\vec{x}(b)) - f(\vec{x}(a))$$

Beispiel

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}, 0 \le t \le 2\pi \qquad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \sin t + e^t \cos t \end{pmatrix}$$

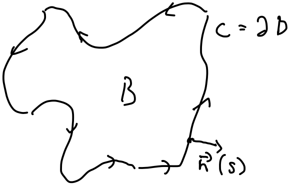
$$\int_C \vec{F}\, ds = \int_0^{2\pi} -e^t \cdot \sin t \left(\cancel{e^t \cos t} - e^t \sin t\right) + e^t \cos t \left(\cancel{e^t \sin t} + e^t \cos t\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{2t}\, dt = \frac{e^{2t}}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{e^{4\pi} - 1}{2}$$

Annahmen für den Rest dieser Vorlesung:

- $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ist ein beschränktes (einfach zusammenhängendes) Gebiet
- Der Rand $\partial B =: C$ ist eine stückweise glatte Kurve,
- C ist parametrisiert durch die Bogenlänge als $\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$,

  Durchlaufrichtung gegen den Uhrzeigersinn
- $\vec{n}(s) := \begin{pmatrix} \dot{y}(s) \\ -\dot{x}(s) \end{pmatrix}$ ist der normierte, nach außen gerichtete Normalvektor auf C in $\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$



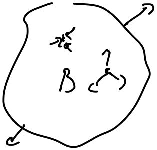
Satz (Gauss'scher Satz in der Ebene)

Sei $\vec{F}\colon D \to \mathbb{R}^2$ ein differenzierbares Vektorfeld mit $B \cup C \subseteq D$, dann gilt

$$\iint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy = \oint_C \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle ds$$

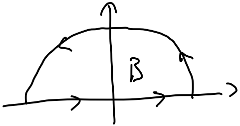
Beitrag aller Quellen u. Senken

Fluss durch Rand.



Beispiel

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}, \qquad B = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le r^2, y \ge 0\}$$



$$\operatorname{div} \vec{F}(x,y) = 2y + 2y = 4y$$

$$\int_B \operatorname{div} \vec{F} \, dx\, dy = \int_{-r}^{r} \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} 4y \, dy\, dx = \frac{8}{3} r^3$$

$$C = C_1 \cup C_2$$

C_1:

$$x(t) = r \cos t, \quad y(t) = r \sin t, \quad 0 \le t \le \pi$$

C_2:

$$x(t) = t, \quad y(t) = 0, \quad -r \le t \le r$$

$C_1: \vec{n} = \dot{\vec{x}}(t)^{\perp} = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r \cdot \sin t \end{pmatrix}$

$$\int_{C_1} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, ds =$$

$$\int_0^{\pi} (2r\cos t \, r\sin t)\, r\cos t + (r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t)\, r \cdot \sin t \, dt$$

$$= \int_0^{\pi} 2r^3\cos^2 t \sin t + r^3 \sin t \, dt = \frac{10}{3} r^3$$

$C_2: \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\int_{C_2} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_{-r}^{r} -t^2 \, dt = -\frac{2}{3} r^3$$

$$\int_C \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_{C_1} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, ds + \int_{C_2} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, ds = \frac{8}{3} r^3$$

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ersetze im Satz von Gauss $\vec{F}$ durch $\vec{F}^{\perp} = \begin{pmatrix} f_2 \\ -f_1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

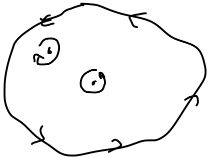
mit der Definition $\operatorname{rot} \vec{F} := \operatorname{div} \vec{F}^{\perp}$ erhalten wir:

Satz (Satz von Stokes in der Ebene = Integralsatz von Green-Riemann)

$$\iint_B \operatorname{rot} \vec{F}\, dx\, dy = \oint_C \vec{F}\, ds$$

Beiträge aller Wirbel in B

Fluss entlang $C = \partial B$



mit $\vec{F} = f \operatorname{grad} g$:

$\langle \nabla g , \vec{n} \rangle$

Satz (Green'sche Formeln)

$$\iint_B (f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) = \oint_C f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, ds \qquad \textit{1. Green'sche Formel}$$

$$\iint_B (f \Delta g - g \Delta f) = \oint_C \left(f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} \right) ds \qquad \textit{2. Green'sche Formel}$$

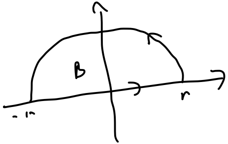
$C = (x(t), y(t)),\ a \leq t \leq b$

$$\oint_C f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t) - \frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) \right) dt$$

Beispiel

$f(x,y) = x^2y^2, \qquad g(x,y) = x^3 - y^3, \qquad B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0\}$

$\nabla f = \begin{pmatrix} 2xy^2 \\ 2x^2y \end{pmatrix} \qquad \nabla g = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ -3y^2 \end{pmatrix} \qquad \Delta g = 6x - 6y$



$\langle \nabla f, \nabla g \rangle = 6x^3y^2 - 6x^2y^3$

$$\int_B f\Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, dx\, dy = \int_{-r}^{r} \int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} \left(12x^3y^2 - 12x^2y^3\right) dx\, dy$$

$$= -\frac{16}{35} r^7$$

Wie zuvor: $C = C_1 \cup C_2$

$$\int_{C_1} f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, ds = \int_0^{\pi} r^4 \cos^2 t \sin^2 t \left(3r^2 \cos^2 t\,(r.\cos t) - 3r^2 \sin^2 t\,(r.\sin t) \right) dt$$

$$= 3r^7 \int_0^{\pi} \sin^2 t \cos^5 t - \sin^5 t \cos^2 t \; dt$$

$$= -\frac{16}{35} r^7$$

$$\int_{C_2} f \cdot \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, ds = \int_{C_2} 0 \, ds = 0$$

$$\oint_C f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, ds = -\frac{16}{35} r^7$$