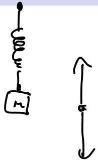
Gewöhnliche Differentialgleichungen

Beispiel: Pendelbewegung



Hooke's Law:

Kraft F proportional zur Auslenkung x

$$F = -c \cdot x$$

Newton:

Kraft = Masse · Beschleunigung

$$F = m \cdot \ddot{x}$$

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -c \cdot x(t)$$

Beispiel: radioaktiver Zerfall

Masseverlust Δm im Zeitraum Δt
ist proportional zu $m \cdot \Delta t$

$$\Delta m = -k \cdot m \cdot \Delta t$$

$$\Big\downarrow \lim \Delta t \to 0$$

$$\dot{m}(t) = -k \cdot m(t)$$

Eine gewöhnliche Differentialgleichung (kurz: DGL) n-ter Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

wobei

- x eine Variable
- $y = y(x)$ eine (unbekannte) Funktion, und
- $y', y'', \dots, y^{(n)}$ die Ableitungen von y sind.

Bemerkungen

Oft schreibt man auch t für die Variable, $x(t)$ für die Funktion und $\dot{x}(t), \ddot{x}(t), \ldots$ für die Ableitungen, andere Bezeichnungen sind je nach Anwendung ebenfalls üblich.

hängt y von mehreren Variablen $\vec{x}$ ab und treten in einer Gleichung $\vec{x}$, y und partielle Ableitungen von y auf, so spricht man von einer partiellen Differentialgleichung

Eine explizite Differentialgleichung ist eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

Die Form $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ wird auch als implizite Differentialgleichung bezeichnet

Eine lineare Differentialgleichung ist eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

- homogen, falls $f(x) \equiv 0$
- inhomogen, falls $f(x) \not\equiv 0$
- mit konstanten Koeffizienten, falls alle a_i konstant sind

Beispiel

$y' = xy^2$ explizite DGL

nicht linear

subst.: $u = y(x)$, $du = y'(x)\,dx$

$$\frac{y'}{y^2} = x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{y'(x)}{y^2(x)}\,dx = \int x\,dx$$

$$\int \frac{1}{u^2}\,du = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$-\frac{1}{y(x)} + C_2 = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$-\frac{1}{y(x)} = \frac{x^2 + C}{2} \quad \Rightarrow \quad y(x) = -\frac{2}{x^2 + C}$$

$y = 0$ ist auch Lösung

Beispiel

$yy' + x = 0$ implizite DGL 1. Ordnung

$$y \cdot y' = -x$$

$$\int y \cdot y' \, dx = \int -x \, dx$$

$$\int y \, dy = -\int x \, dx$$

$$y^2 = c^2 - x^2$$

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad \rightsquigarrow \text{Kreisgleichung}$$

Definition

Intervall

Eine n mal stetig differenzierbare Funktion $y\colon I \to \mathbb{R}$ heißt Lösung oder Integral einer Differentialgleichung, falls $x, y, y', \dots y^{(n)}$ die Differentialgleichung auf ganz I erfüllen.

Eine Differentialgleichung integrieren heißt alle Lösungen zu bestimmen.

- spezielle oder partikuläre Lösung: Lösung ohne freie Parameter
- allgemeine Lösung: Schar von Lösungen mit n freien Parametern

  ↳ n-te Ordnung ⇒ n Integrationskonst.
- vollständige Lösung: allgemeine Lösung, die alle speziellen Lösungen abdeckt
- singuläre Lösung: spezielle Lösung, die keiner Lösungsschar angehört

Beispiel

$y' = xy^2$

$y(x) = -\frac{2}{x^2 + c}$ allgemeine Lösung (nicht vollständig!)

$y(x) = 0$ singuläre Lösung

$y(x) = -\frac{2}{x^2 + 3}$ spezielle Lösung

$y(x) = -\frac{2}{x^2}$ — " —

Beispiel

$y' - 5y = 0$ Lineare DGL 1. Ordnung mit konst. Koeff.

allgemeine Lsg: $y(x) = c \cdot e^{5x}$ ist vollständig

Spezielle Lösungen: $y(x) = 0$, $y(x) = e^{5x}$, $y(x) = -10e^{5x}$ ...

Beispiel

$y'' + 9y = 9$ Lin. DGL 2. Ordnung, konstante Koeff.

Spezielle Lösung: $y(x) = \underline{1}$

allgemeine Lösung (vollständig):

$$y(x) = \underline{1} + c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x$$

Beispiel

$|y'| + |y| = 0$

keine allgemeine Lösung!

singuläre Lösung: $y(x) = 0$

Beispiel:Pendelgleichung

$y'' + \frac{c}{m} y = 0$

allgemeine + vollständige Lösung

$$y(x) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot x + B\right)$$

Beispiel: Radioaktiver Zerfall

$y' = -ky$

Allgemeine + vollst. Lösung

$$y(x) = c \cdot e^{-kx}$$

Definition

Ein Anfangswertproblem (kurz: AWP) n-ter Ordnung besteht aus einer Differentialgleichung

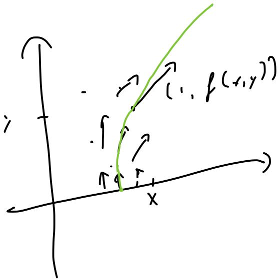
$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

und Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots \quad, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

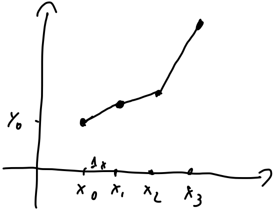
Gegeben: Differentialgleichung der Form $y' = f(x,y)$

Lösungen sind Kurven, deren Anstieg in (x,y) genau $f(x,y)$ ist.



- (x,y,y') heißt Linienelement
- die Gesamtheit aller Linienelemente heißt Richtungsfeld
- Feldlinien sind Kurven, deren Steigung in (x,y) genau y' ist

Eulersche Polygonzugmethode



Gegeben: Anfangswertproblem $y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$

Wähle Schrittweite Δx und berechne

$$
\begin{array}{llll}
x_1 = x_0 + \Delta x & x_2 = x_1 + \Delta x & x_3 = x_2 + \Delta x & \dots \\
y_1 = y_0 + \Delta x \cdot f(x_0, y_0) & y_2 = y_1 + \Delta x \cdot f(x_1, y_1) & y_3 = y_2 + \Delta x \cdot f(x_2, y_2) & \dots
\end{array}
$$

Man erhält einen Polygonzug, der für $\Delta x \to 0$ gegen eine Lösung des AWP konvergiert

Beispiel

$y' = y$, $y(0) = 1$, Schrittweite $\Delta x = 0.1$

$x_1 = 0,1 \qquad y_1 = 1 + (0,1) \cdot 1 = 1,1$

$x_2 = 0,2 \qquad y_2 = 1,1 + 0,1 \cdot 1,1 = (1,1)^2 = 1,21$

$x_3 = 0,3 \qquad y_3 = (1,1)^3$

$\vdots \qquad \vdots$

$x_{10} = 1 \qquad y_{10} = (1,1)^{10} \approx 2,5937$

$\frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow \int \frac{1}{y}\, dy = \int 1\, dx \Rightarrow \ln y = x + C \Rightarrow y = c \cdot e^x$

AWP: $1 = c \cdot e^0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y(1) = e \approx \underline{2,7183}$

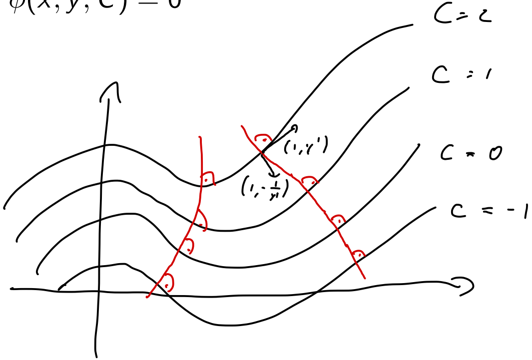
Beispiel

$y' = y,\ y(0) = 1$, Schrittweite $\Delta x = 0.1$

Schrittweite	Näherung für $y(1)$	Fehler
$1/10$	2.5937	0.1245
$1/100$	2.7048	0.0135
$1/1000$	2.7169	0.0014
$1/10000$	2.7181	0.0001

Bestimmung der Orthogonaltrajektorien einer Kurvenschar:

Gegeben Kurvenschar $\phi(x, y, C) = 0$



Bestimmung der Orthogonaltrajektorien einer Kurvenschar:

Gegeben Kurvenschar $\phi(x, y, C) = 0$

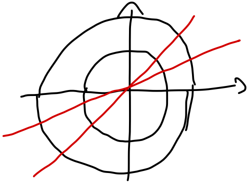
Differentiation von ϕ nach x liefert $\phi_x(x, y, C) + \phi_y(x, y, C) \cdot y' = 0$

Elimination von C führt zu einer DGL $F(x, y, y') = 0$

Orthogonaltrajektorien erfüllen die Differentialgleichung $F(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0$

Beispiel

Orthogonaltrajektorien der Kreisschar $x^2 + y_{(x)}^2 - C^2 = 0$



$$\phi_x = 2x + 2\,y(x) \cdot y'(x) = 0$$

$$y \cdot y' + x = 0 \quad \text{DGL der Kreisschar}$$

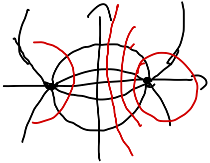
$$-\frac{y}{y'} + x = 0 \quad \text{DGL der Orthogonaltraj.}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow y = k \cdot x$$

Beispiel: Dipol

Gleich große elektrische Ladungen in $(-1, 0)$ und $(1, 0)$
Feldlinien des elektrostatischen Feldes sind Kreise $x^2 + (y - C)^2 = 1 + C^2$

Gesucht: Äquipotentiallinien = Orthogonaltraj. der Feldlinien.



$$\phi_x = 2x + 2(y - C) \cdot y' = 0$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{x}{y'} + y$$

$$x^2 + (y - C)^2 = 1 + C^2$$

$$x^2 + \left(\cancel{y} - \frac{x}{y'} - \cancel{y}\right)^2 = 1 + \left(\frac{x}{y'} + y\right)^2 \Rightarrow \left(x^2 - y^2 - 1\right) y' - 2xy = 0$$

$(x^2 - y^2 - 1)\, y' - 2xy = 0$ -- DGL der Feldlinien

$$-\frac{x^2 - y^2 - 1}{y'} = 2xy$$

Lösung: $(x - C)^2 + y^2 = C^2 - 1$