Definition

Ein Anfangswertproblem (kurz: AWP) n-ter Ordnung besteht aus einer Differentialgleichung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

und Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots \quad , \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Beispiel:Pendelgleichung

$$y'' + \frac{c}{m} y = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0$$

allg. Lsg $\quad y = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\, x + B\right)$

$$y' = A \sqrt{\frac{c}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\, x + B\right)$$

AB: $\left.\begin{aligned} y_0 &= A \cdot \sin B \\ v_0 &= A \cdot \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot \cos B \end{aligned}\right\}$ $\quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m v_0^2}{c}}$

$$B = \arcsin \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{m v_0^2}{c}}}$$

Beispiel

$yy' + x = 0, \qquad y(0) = a$

$x^2 + y^2 = c^2$

AB: $0^2 + a^2 = c^2 \Rightarrow c = \pm a$

für $a > 0$: $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

$a < 0$: $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$

$a = 0$ Keine reelle Lösung

($y = \sqrt{-x^2}$ nur in $x = 0$ reell)

- Lokales Existenzproblem
  Hat das AWP in einer Umgebung des Anfangspunktes eine Lösung?

- Globales Existenzproblem
  Existiert eine Lösung auf einem vorgegebenen Intervall?

- Eindeutigkeitsproblem
  Gibt es mehrere verschiedene Lösungen durch den Anfangspunkt?

Satz (Existenzsatz von Peano)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge, $(x_0, y_0) \in U$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann existiert mindestens eine Lösung des Anfangswertproblems

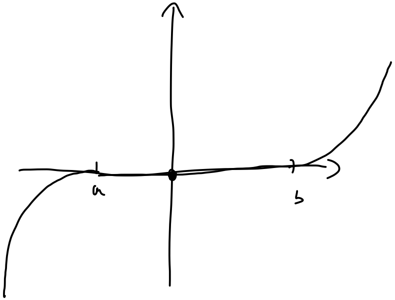
$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

Beispiel

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

Lösungen: Intervall $[a, b]$ mit $a \leq 0 \leq b$

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(a-x)^2 & x < a \\ 0 & a \leq x \leq b \\ \frac{1}{4}(b-x)^2 & x > b \end{cases}$$



$\rightsquigarrow$ nicht eindeutig lösbar

Beispiel

$y' = y^2, \quad y(1) = 1$

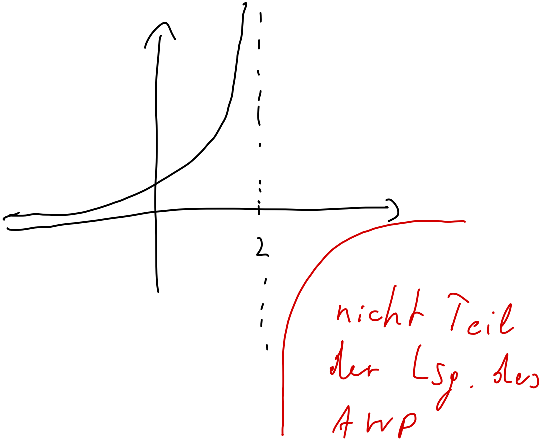
allgemeine Lsg: $\quad y = \frac{1}{c-x}$

AB: $1 = \frac{1}{c-1} \Rightarrow c = 2$

$$y(x) = \frac{1}{2-x}$$

Lsg. im Intervall $(-\infty, 2)$

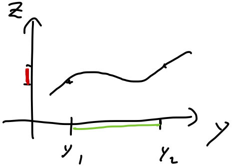
aber nicht für $x \geq 2$



Gegeben: $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$

- f erfüllt auf D bezüglich y eine globale Lipschitzbedingung, wenn es $L \geq 0$ gibt, sodass

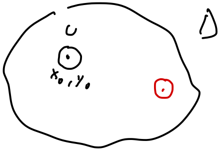
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$



für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in D$. L heißt Lipschitzkonstante.

- f erfüllt auf D bezüglich y eine lokale Lipschitzbedingung, wenn es zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in D$ eine Umgebung U und eine Zahl $L \geq 0$ gibt, sodass

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$



für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in U$.

Beispiel

$f(x, y) = |y|$ auf $D = \mathbb{R}^2$

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| = \big| |y_1| - |y_2| \big| \underset{\substack{\uparrow \\ L=1}}{\leq} \left| y_1 - y_2 \right|$$

globale Lipschitzbed. mit $L = 1$

Beispiel

$f(x,y) = xy$ auf $D_1 = \mathbb{R}^2$ bzw. $D_2 = \{(x,y) \mid |x| \leq 1\}$

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |xy_1 - xy_2| = |x| \cdot |y_1 - y_2|$

D_1: kein globale Lipschitzbed.

für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y_1), (x, y_2) \in U_r(x_0, y_0)$ gilt $|x| \leq |x_0| + r$

$\Rightarrow |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq \underbrace{(|x_0| + r)}_{L} \cdot |y_1 - y_2|$

D_2: $|x| \leq 1 \Rightarrow$ globale Lipschitzbed. mit $L = 1$

Beispiel

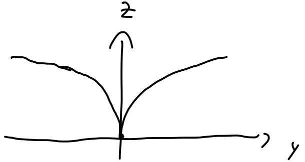
$f(x,y) = \sqrt{|y|}$ auf $D = \mathbb{R}^2$

für $y_1 = 0$:

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| = \sqrt{|y_2|} \overset{!}{\leq} L\,|y_2|$$

aber: $\lim\limits_{y_2 \to 0} \dfrac{\sqrt{|y_2|}}{|y_2|} = \infty \Rightarrow$ es gibt y_2 sodass $\sqrt{|y_2|} > L\,|y_2|$

für jedes L



Erinnerung (Mittelwertsatz)

Falls f stetig nach y differenzierbar ist, dann gibt es ein $\eta \in (y_1, y_2)$, sodass

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |f_y(\eta)| \cdot |y_1 - y_2|$$

↳ "Lipschitzkonstante"

Satz

- Falls f_y auf D beschränkt ist, so erfüllt f auf D bezüglich y eine globale Lipschitzbedingung.
- Ist f stetig partiell nach y differenzierbar, so erfüllt f auf D bezüglich y eine lokale Lipschitzbedingung.

Satz (Eindeutigkeitssatz)

Angenommen:

- f erfüllt auf D bezüglich y eine globale Lipschitzbedingung $(x_0, y_0) \in D$
- $y_1(x)$ und $y_2(x)$ sind Lösungen des AWP $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$
- I ist ein Intervall, das x_0 enthält
- $(x, y_1(x)) \in D$ für alle $x \in I$
- $(x, y_2(x)) \in D$ für alle $x \in I$

Dann ist $y_1(x) = y_2(x)$ auf ganz I.

Satz (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

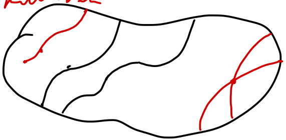
f sei auf D stetig und erfülle auf D bezüglich y eine lokale Lipschitzbedingung.

Dann gibt es zu jedem $(x_0, y_0) \in D$ eine eindeutige Lösungskurve für das AWP

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0,$$

die sich beidseitig bis zum Rand von D erstreckt

Lösungskurven enden nicht



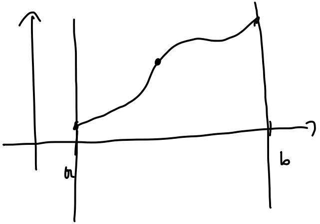
D

Lösungskurven schneiden sich nicht

Anmerkungen

- der Rand von D kann auch "im Unendlichen" liegen
- globale Lipschitzbedingung in einem Streifen $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b\}$ garantiert globale Existenz von Lösungen auf diesem Streifen

bzgl. Intervall $[a, b]$

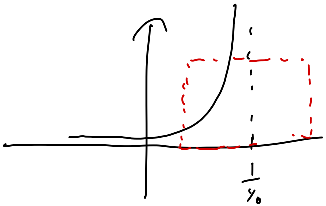


Beispiel

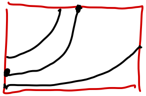
$$y' = y^2, y(0) = y_0 > 0$$

allg. Lsg. $y = \dfrac{1}{c - x}$

$y = \dfrac{y_0}{1 - y_0 \cdot x}$ definiert für $x < \dfrac{1}{y_0}$



AWP auf Rechteck



Lösungsmethoden für Differentialgleichungen 1. Ordnung

Trennung der Variablen

Gegeben: DGL der Form $y' = f(x) \cdot g(y)$

Lösung durch Integration:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$$

Beispiel

$$y' + e^y \cos x = 0$$

$$y' = -e^y \cos x$$

$$-\frac{y'}{e^y} = \cos x \implies \int -e^{-y}\, dy = \int \cos x \, dx$$

$$e^{-y} = \sin x + C$$

Beispiel

$$(y^2x - y^2)y' + x^2y + x^2 = 0$$

$$y' = -(x^2y + x^2) \cdot \frac{1}{y^2x - y^2}$$

$$= -x^2(y+1) \cdot \frac{1}{y^2(x-1)}$$

$$\frac{y^2}{1+y} y' = \frac{x^2}{1-x} \qquad \int \frac{y^2}{1+y}\, dy = \int \frac{x^2}{1-x}\, dx$$

$$\int y - 1 + \frac{1}{1+y}\, dy = \int -x - 1 + \frac{1}{1-x}\, dx$$

$$\frac{y^2}{2} - y + \ln|1+y| = -\frac{x^2}{2} - x - \ln|1-x| + C$$

Beispiel

$y' \sin x = y \ln y$, Gesucht: Lösungskurve durch Punkte $(0, 1)$ und $(\frac{\pi}{2}, 1)$

$$\frac{y'}{y \ln y} = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \int \frac{1}{y \ln y}\, dy = \int \frac{1}{\sin x}\, dx$$

subst. $u = \ln y$

$du = \frac{1}{y}\, dy$

subst $t = \tan \frac{x}{2}$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$

$$\ln(\ln(y)) = \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) + C$$

$$y = e^{c \tan \frac{x}{2}}$$

AB: $1 = e^{c \tan 0}$ immer erfüllt.

$1 = e^{c \tan \frac{\pi}{4}} \Rightarrow c = 0$

Lsg. d. AWP: $y(x) = 1$

Substitution der abhängigen Variablen

Substitution $z(x) = f(x, y(x))$ führt auf eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen

Bemerkungen

Geeignete Substitution ist nicht immer leicht zu finden

Für manche Typen von Differentialgleichungen gibt es Standardsubstitutionen

Beispiel

$y(xy+1)+(1+xy+x^2y^2)xy'=0$

Substitution: $z=xy$ $\qquad y=\frac{z}{x} \Rightarrow y'=\frac{z'\cdot x-z}{x^2}$

$$\frac{z}{x}(z+1)+(1+z+z^2)\frac{z'\cdot x-z}{x}=0$$

$$\frac{z}{x}\cancel{(z+1)}+(1+z+z^2)\cdot z'-(\cancel{1+z}+z^2)\cdot\frac{z}{x}=0$$

$$\frac{(1+z+z^2)}{z^3}\cdot z'=\frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}\,dz=\int\frac{1}{x}\,dx$$

$$-\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{z}+\ln|z|=\ln|x|+C$$

$$-\frac{1}{2x^2y^2}-\frac{1}{xy}+\ln|xy|=\ln|x|+C$$

sing. Lsg $y=0$

Beispiel

$x + y + (3x + 3y - 4)y' = 0$

Substitution: $z = x + y$ $\quad z' = 1 + y'$

$$z + (3z - 4)(z' - 1) = 0$$

$$\int \frac{3z-4}{2z-4}\, dz = \int 1 \, dx$$

$$\int \frac{3}{2} + \frac{2}{2z-4}\, dz = \int 1 \, dx$$

$$\frac{3}{2} z + \ln|2z - 4| = x + C$$

Sing. Lsg.: $z = 2$

$y = 2 - x$

Rücksub.: $\frac{3}{2}(x+y) + \ln|2x + 2y - 4| = x + C$

$\boxed{\text{Homogene Differentialgleichung}}$

Gegeben: DGL der Form $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$

Lösung durch Substitution:

$$z = \frac{y}{x}, \qquad y' = xz' + z$$

Beispiel

$$y = xy' - \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{y}{x} = y' - \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$ subst.: $z = \frac{y}{x}$, $y' = x z' + z$

$$x z' + \cancel{z} = \cancel{z} + \sqrt{1 + z^2}$$

$$\frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\, dz = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\operatorname{Arsinh} z = \ln|x| + C$$

$$z = \sinh(\ln|x| + C)$$

$$y = x \sinh(\ln|x| + C)$$