$\boxed{\text{Trennung der Variablen}}$

Gegeben: DGL der Form $y' = f(x) \cdot g(y)$

Lösung durch Integration:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx$$

$\boxed{\text{Substitution der abhängigen Variablen}}$

Substitution $z(x) = f(x, y(x))$ führt auf eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen

Bemerkungen

Geeignete Substitution ist nicht immer leicht zu finden

Für manche Typen von Differentialgleichungen gibt es Standardsubstitutionen

Homogene Differentialgleichung

Gegeben: DGL der Form $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$

Lösung durch Substitution:

$$z = \frac{y}{x}, \qquad y' = xz' + z$$

Jacobi-Differentialgleichung

Gegeben: DGL der Form $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$

Lösung durch Substitution (2 Fälle):

1. Fall:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda(ax+by) = \mu(\alpha x + \beta y)$$

Es liegt eine DGL der Form $y' = g(\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c})$ vor. Substitution: $z = \bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c}$

Jacobi-Differentialgleichung

Gegeben: DGL der Form $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$

Lösung durch Substitution (2 Fälle):

2. Fall:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} ax+by=-c \\ \alpha x+\beta y=-\gamma \end{matrix} \quad \text{hat eine eindeutige Lösung } (x_0, y_0)$$

Substitution: $\bar{x} = x - x_0$, $\bar{y} = y - y_0$ führt auf eine Differentialgleichung

$$\bar{y}' = f\left(\frac{a + b(\bar{y}/\bar{x})}{\alpha + \beta(\bar{y}/\bar{x})}\right)$$

$a\bar{x} + \underline{a x_0} + b\bar{y} + \underline{b y_0} + \underline{c}$

Beispiel

$y'(4x - 3y - 6) + (1 + x - 2y) = 0$

$y' = \frac{-x + 2y - 1}{4x - 3y - 6}$ $\quad$ $\det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow$ 2. Fall.

$\left.\begin{array}{l} -x + 2y = 1 \\ 4x - 3y = 6 \end{array}\right\}$ $\quad$ $\begin{array}{l} x_0 = 3 \\ y_0 = 2 \end{array}$

$\bar{x} = x - 3$

$\bar{y} = y - 2$

$\bar{y}' = \frac{-1 + 2\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}{4 - 3\frac{\bar{y}}{\bar{x}}} \rightsquigarrow$ homogene DGL

subst.: $z = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$

$\bar{y}' = z + \bar{x} z'$

$$z + \bar{x} z' = \frac{-1 + 2z}{4 - 3z}$$

$$\frac{4 - 3z}{3z^2 - 2z - 1} z' = \frac{1}{\bar{x}}$$

$$\int \frac{4 - 3z}{3z^2 - 2z - 1} dz = \int \frac{1}{\bar{x}} d\bar{x}$$

$$\frac{1}{4} \ln |1 - z| - \frac{5}{4} \ln |1 + 3z| = \ln |\bar{x}| + C$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| 1 - \frac{y-2}{x-3} \right| - \frac{5}{4} \ln \left| 1 + 3 \frac{y-2}{x-3} \right| = \ln |x - 3| + C$$

Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Gegeben: DGL der Form $y' = a_1(x)y + a_0(x)$ $\qquad a_0, a_1$ stetig auf Intervall I

Lösung

1. Schritt: Lösung der homogenen Gleichung $y' = a_1(x)y$

$$y_{\text{hom}} = c \cdot e^{A(x)} \qquad \text{mit} \qquad A(x) = \int a_1(x)\,dx$$

2. Schritt: Lösen der inhomogenen Gleichung

Satz

Die allgemeine und vollständige Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung ist

$$y = y_{\text{hom}} + y_{\text{sp}},$$

wobei
y_{hom} die allgemeine Lösung der homogenen DGL $y' = a_1(x)y$ und
y_{sp} eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

Auffinden einer speziellen Lösung: Variation der Konstanten

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: $y = c \cdot e^{A(x)}$

Ersetze c durch eine Funktion $C(x)$ und setze in die DGL ein.

$$y_{sp}(x) = C(x) \cdot \underbrace{e^{A(x)}}_{y_0}$$

$$y_{sp}'(x) = C'(x)\; y_0(x) + C(x) \cdot y_0'(x)$$

$$y_{sp}' = a_1\, y_{sp} + a_0$$

$$C'\, y_0 + C\, y_0' = a_1\, C\, y_0 + a_0 \Rightarrow C' \cdot e^{A(x)} = a_0$$

$$C'(x) = \frac{a_0(x)}{e^{A(x)}}$$

Auffinden einer speziellen Lösung: Variation der Konstanten

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: $y = c \cdot e^{A(x)}$

Ersetze c durch eine Funktion $C(x)$ und setze in die DGL ein.

$$C(x) = \int a_0(x) e^{-A(x)}\, dx$$

$$y_{\text{sp}} = e^{A(x)} \cdot \int a_0(x) e^{-A(x)}\, dx$$

Satz

Sind $a_0(x), a_1(x)$ stetig auf I und $x_0 \in I$, dann ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = a_1(x)y + a_0(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

gegeben durch

$$y_{\text{sp}} = y_0 \cdot e^{A(x)} + e^{A(x)} \cdot \int_{x_0}^{x} a_0(\xi) e^{-A(\xi)} \, d\xi,$$

wobei

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a_1(\xi) \, d\xi$$

Beispiel

$y' + 2xy - 4x = 0$

homogene Gleichung: $y' + 2xy = 0$ bzw. $y' = \overbrace{-2x}^{a_1(x)} \cdot y$

$$y_{hom} = c \cdot e^{\int a_1(x)\,dx} = c\, e^{-x^2}$$

Variation d. Konst.:

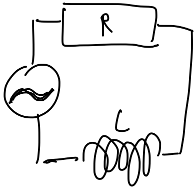
$$y_{sp} = C(x) \cdot e^{-x^2}$$

$$C(x) = \int a_0(x)\, e^{x^2}\,dx = \int 4x\, e^{x^2}\,dx = 2e^{x^2} + C$$

$$y = y_{hom} + y_{sp} = 2 + c \cdot e^{-x^2}$$

Beispiel

Serienschaltung von Induktivität L und Widerstand R,
Wechselstromgenerator erzeugt Spannung $v(t) = \sin \omega t$



Gesucht: Stromstärke $i(t)$ mit $i(0) = 0$

Kirchhoff: $$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t)$$

$$i'(t) = -\frac{R}{L} \cdot i(t) + \frac{v(t)}{L}$$

$$i_{sp} = i_0 e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} a_0(\tau) e^{-A(\tau)} \, d\tau$$

mit $$A(t) = \int_{t_0}^{t} a_1(\tau) \, d\tilde{\tau}$$

$$A(t) = \int_0^t -\frac{R}{L}\, d\tilde{\tau} = -\frac{tR}{L}$$

$$i_{sp} = 0 \cdot e^{-\frac{tR}{L}} + e^{-\frac{tR}{L}} \int_0^t \frac{\sin(\omega \tilde{\tau})}{L}\, e^{\frac{\tilde{\tau} R}{L}}\, d\tilde{\tau}$$

$$i_{sp} = \frac{R}{R^2 + L^2 \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{L\omega}{R} \cos \omega t \right) + \frac{L\omega}{R^2 + L^2 \omega^2}\, e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$\boxed{\text{Bernoullische Differentialgleichung}}$

Gegeben: DGL der Form $y' = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^\alpha$

Lösung durch Substitution:

$$z = y^{1-\alpha}, \qquad z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$$

Man erhält eine lineare DGL für z:

$$z' = (1-\alpha)a(x) \cdot z + (1-\alpha)b(x)$$

Beispiel

$xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$ Bernoulli - DGL mit $\alpha = \frac{1}{2}$

$$z(x) = y^{1-\alpha} = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y} \quad , \quad z' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \cdot y'$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = \frac{4\sqrt{y}}{x} + x$$

$$2z' = \frac{4z}{x} + x$$

$$z' = \underbrace{\frac{2}{x}}_{a_1} \cdot z + \underbrace{\frac{x}{2}}_{a_0}$$

$$z_{hom} = C\, e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = C\, e^{2\ln|x|} = C \cdot x^2$$

$$z_{sp} = c(x) \cdot x^{2}$$

$$c(x) = \int \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln|x| + c$$

$$z = x^2 \left(c + \frac{1}{2} \ln|x| \right)$$

$$y = x^4 \left(c + \frac{1}{2} \ln|x| \right)^2$$

Riccatische Differentialgleichung

Gegeben: DGL der Form $y' = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^2 + c(x)$

mit einer bekannten speziellen Lösung $y_1(x)$

Lösung durch Substitution:

$$
\begin{aligned}
y = z + y_1, \qquad y' &= z' + y_1' \\
&= z' + a(x)y_1 + b(x)y_1^2 + c(x)
\end{aligned}
$$

Man erhält eine Bernoulli-DGL für z:

$$z' = (a(x) + 2by_1(x)) \cdot z + b(x) \cdot z^2$$

Beispiel

$y' = -y^2 + 2/x^2$

spezielle Lsg: Ansatz $y_1(x) = \alpha x^\beta$

(oft funktioniert auch $y_1 = \frac{\alpha}{x} + \beta x$)

$y_1'(x) = \alpha\beta\, x^{\beta-1}$

$\alpha\beta\, x^{\beta-1} = -\alpha^2 x^{2\beta} + \frac{2}{x^2}$ kann nur identisch erfüllt sein, wenn $2\beta = \beta - 1 = -2$, also $\beta = -1$

$-\alpha x^{-2} = -\alpha^2 x^{-2} + 2x^{-2} \Rightarrow \alpha = 2$

spezielle Lösung: $y_1(x) = \frac{2}{x}$

subst: $y = z + \frac{2}{x}$, $y' = z' - \frac{2}{x^2}$

$$z' \cancel{- \frac{2}{x^2}} = -z^2 - \frac{4z}{x} \cancel{- \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^2}}$$

$z' = -z^2 - \frac{4z}{x}$ Bernoulli DGL , $\alpha = 2$

subst $w = z^{1-\alpha} = \frac{1}{z}$

$w' = \frac{4}{x} \cdot w + 1$ lineare DGL

Lösung: $w(x) = c \cdot x^4 - \frac{x}{3}$

Rücksubst.: $z = \frac{1}{cx^4 - \frac{x}{3}}$

$$y = \frac{1}{cx^4 - \frac{x}{3}} + \frac{2}{x}$$

Exakte Differentialgleichung

eine DGL der Form

$$A(x, y) + B(x, y)y' = 0$$

heißt exakt, falls es eine stetig differenzierbare Funktion F mit $F_x = A$ und $F_y = B$ gibt
Hinreichende Bedingung: $A_y = B_x$

Lösung einer exakten DGL ist $F(x, y) = C$

Lösungsweg

$$F(x, y) = \int A(x, y)\, dx + \mu(y)$$

Bestimme $\mu(y)$ aus der Gleichung

$$B(x, y) = \frac{d}{dy} \int A(x, y)\, dx + \mu'(y)$$

Beispiel

$y' = -\frac{3x^2+6xy^2}{6x^2y+4y^3}$

$$\underbrace{(3x^2+6xy^2)}_{A(x,y)} + \underbrace{(6x^2y+4y^3)}_{B(x,y)}y' = 0$$

$$\left.\begin{aligned} A_y &= 12xy \\ B_x &= 12xy \end{aligned}\right\} \text{ DGL ist exakt}$$

$$F(x,y) = \int A(x,y)\,dx = \int 3x^2 + 6xy^2\,dx = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)$$

$$F_y = 6x^2y + \varphi'(y) \overset{!}{=} B = 6x^2y + 4y^3 \Rightarrow \varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4 + C$$

Lösung der DGL:

$$F(x,y) = C \qquad x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$$

Beispiel

$y + 2xy' = 0$ $\quad A = y \quad B = 2x$

$A_y = 1 \neq B_x = 2$ nicht exakt.

multipliziere mit y:

$y^2 + 2xy\,y' = 0 \quad \tilde{A} = y^2 \quad \tilde{B} = 2xy$

$\tilde{A}_y = 2y = \tilde{B}_x = 2y \Rightarrow$ exakte Dgl

$F = \int \tilde{A}\,dx = \int y^2\,dx = x \cdot y^2 + \varphi(y)$

$F_y = 2xy + \varphi'(y) \overset{!}{=} B(x,y) = 2xy \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C$

Lösung der DGL: $x \cdot y^2 = C$

Integrierender Faktor

Gegeben DGL der Form $A(x, y) + B(x, y)y' = 0$

Eine im Definitionsbereich nirgends verschwindende Funktion heißt integrierender Faktor der DGL, falls

$$\mu(x, y) \cdot A(x, y) + \mu(x, y) \cdot B(x, y)y' = 0$$

exakt ist.

$$\frac{\partial(\mu \cdot A)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu \cdot B)}{\partial x} \Rightarrow \mu_y A + \mu \cdot A_y = \mu_x \cdot B + \mu \cdot B_x$$

$$\mu(A_y - B_x) = \mu_x B - \mu_y A$$

μ nur von x abhängig: $\dfrac{\mu_x}{\mu} = \dfrac{A_y - B_x}{B} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{A_y - B_x}{B}\,dx}$

Integrierender Faktor

Gegeben DGL der Form $A(x, y) + B(x, y)y' = 0$

Eine im Definitionsbereich nirgends verschwindende Funktion heißt **integrierender Faktor** der DGL, falls

$$\mu(x, y) \cdot A(x, y) + \mu(x, y) \cdot B(x, y)y' = 0$$

exakt ist.

Finden von integrierenden Faktoren

$$\frac{A_y - B_x}{B} \text{ hängt nur von } x \text{ ab} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(x) = \exp\left(\int \frac{A_y - B_x}{B}\, dx\right)$$

$$\frac{A_y - B_x}{A} \text{ hängt nur von } y \text{ ab} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(y) = \exp\left(\int -\frac{A_y + B_x}{A}\, dy\right)$$

Beispiel

$$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y) + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)y' = 0$$

$$\left.\begin{aligned} A_y &= 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1 \\ B_x &= 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3 \end{aligned}\right\} \neq \qquad \text{DGL nicht exakt}$$

$$\frac{A_y - B_x}{A} = \frac{8xy^3e^y + 8xy^2 + 4}{2xy^4e^y + 2xy^3 + y} = \frac{4}{y} \qquad \text{hängt nur von } y \text{ ab}$$

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{4}{y}\,dy} = \frac{1}{y^4}$$

$$\left(2xe^y + 2\frac{x}{y} + \frac{1}{y^3}\right) + \left(x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4}\right)y' = 0$$

$$F = \int A(x,y)\,dx = \int 2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3}\,dx$$

$$= x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + \varphi(y)$$

$$F_y = x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y^4} + \varphi'(y) \overset{!}{=} B(x,y) = x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y^4}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = 0 \quad \Rightarrow \varphi(y) = C$$

Lösung:

$$x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = C$$

Zwei integrierende Faktoren $\mu(x,y)$ und $\nu(x,y)$ heißen wesentlich verschieden, wenn es keine Konstante c mit $\mu(x,y) = c \cdot \nu(x,y)$ gibt.

Satz

Sind $\mu(x,y)$ und $\nu(x,y)$ zwei wesentlich verschiedene integrierende Faktoren der DGL $A(x,y) + B(x,y)y' = 0$, dann ist

$$\frac{\mu(x,y)}{\nu(x,y)} = C$$

die allgemeine Lösung der DGL.

Beispiel

$y + 2xy' = 0$ $\quad A_y = 1 \quad , \quad B_x = 2$

$$\frac{A_y - B_x}{B} = -\frac{1}{2x}$$ hängt nur von x ab

$$\frac{A_y - B_x}{A} = -\frac{1}{y}$$ hängt nur von y ab

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{2x}\,dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\nu(x) = e^{\int \frac{1}{y}\,dy} = y$$

2 wesentlich verschieden int. Faktoren

$\Rightarrow$ allgemeine Lsg. $y \cdot \sqrt{x} = C$