Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ stetige Funktionen auf einem Intervall I

Kurzschreibweise $L[y] = b(x)$

L ist der Operator, der jeder n-mal stetig differenzierbaren Funktion y die neue Funktion

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$$

zuordnet.

Satz

Für jedes $x_0 \in I$ und Startwerte $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1} \in \mathbb{R}$ hat das AWP

$$L[y] = b, \qquad y(x_0) = w_0, \quad y'(x_0) = w_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = w_{n-1}$$

eine eindeutige Lösung auf dem gesamten Definitionsintervall I.

Satz

Die allgemeine und vollständige Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung ist

$$y = y_{\text{hom}} + y_{\text{sp}},$$

wobei
y_{hom} die allgemeine Lösung der homogenen DGL $L[y] = 0$ und
y_{sp} eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

Lösen des AWPs

- 1. Schritt: löse homogene Gleichung
- 2. Schritt: finde eine Lösung der inhomogenen Gleichung
- 3. Schritt: bestimme Konstanten durch Einsetzen der Anfangswerte

1. Schritt: Lösen der homogenen Gleichung

Beobachtung

Linearkombinationen von Lösungen der homogenen Gleichung sind ebenfalls Lösungen der homogenen Gleichung

y_1, y_2 Lsgn. von $L[y] = 0$

$\tilde{y} = s \cdot y_1 + t \cdot y_2 \qquad s, t \in \mathbb{R}$

$$L[\tilde{y}] = \tilde{y}^{(n)} + a_{n-1} \tilde{y}^{(n-1)} + \ldots + a_1 \tilde{y}' + \tilde{y}$$

$$= \left(s\, y_1^{(n)} + t \cdot y_2^{(n)}\right) + a_{n-1}\left(s\, y_1^{(n-1)} + t\, y_2^{(n-1)}\right) + \ldots + a_1\left(s\, y_1' + t\, y_2'\right) + a_0\left(s \cdot y_1 + t \cdot y_2\right)$$

$$= s \cdot L[y_1] + t\, L[y_2] = 0$$

1. Schritt: Lösen der homogenen Gleichung

Beobachtung

Linearkombinationen von Lösungen der homogenen Gleichung sind ebenfalls Lösungen der homogenen Gleichung

Die Lösungsmenge

$$\ker[L] := \{y\colon I \to \mathbb{R} \mid L[y] = 0 \text{ auf ganz } I\}$$

ist ein Vektorraum der Dimension n.

Definition

Linear unabhängige Lösungen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ von $L[y] = 0$ heißen Fundamentalsystem.

Jede Lösung der homogenen DGL hat die eindeutige Form

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n \qquad \text{mit } C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$$

Satz

Die Lösungen $y_1, \dots, y_n$ sind genau dann ein Fundamentalsystem, wenn die

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

für ein ($\iff$ alle) $x \in I$

$W(x)$ heißt Wronski-Determinante.

Beispiel

$y''' - y' = 0$ auf $I = \mathbb{R}$

$y_1 = 1 \quad , \quad y_2 = e^x \quad , \quad y_3 = e^{-x}$

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{pmatrix} = 1 \cdot e^x \cdot e^{-x} - 1 \cdot e^x \cdot (-e^{-x}) = 2 \neq 0$$

alternativ, z.B. $W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

$\Rightarrow \{y_1, y_2, y_3\}$ ist Fundamentalsystem

allg. Lsg.: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$

2. Schritt: Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

Methoden

- Ansatzmethode:
  stark abhängig von der Form von $b(x)$

- Reduktion der Ordnung:
  Substitution führt auf DGL niedrigerer Ordnung

- Variation der Konstanten:
  n Konstanten $\rightarrow$ zusätzliche Bedingungen können die Lösung vereinfachen

3. Schritt: Einsetzen der Anfangswerte

Allgemeine Lösung ist

$$y = y_{\text{sp}} + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

$y(x_0) = w_0 \qquad y_{sp}(x_0) + C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = w_0$

$y'(x_0) = w_1 \qquad y' = y_{sp}'(x_0) + C_1 y_1'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = w_1$

3. Schritt: Einsetzen der Anfangswerte

Allgemeine Lösung ist

$$y = y_{\text{sp}} + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

n-maliges differenzieren und Einsetzen der Anfangswerte liefert

$$\begin{array}{ccccccccc}
y_{\text{sp}}(x_0) & + & C_1 y_1(x_0) & + & \cdots & + & C_n y_n(x_0) & = & w_0 \\
y'_{\text{sp}}(x_0) & + & C_1 y'_1(x_0) & + & \cdots & + & C_n y'_n(x_0) & = & w_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
y_{\text{sp}}^{(n-1)}(x_0) & + & C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + & \cdots & + & C_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & w_{n-1}
\end{array}$$

Wegen $W(x_0) \neq 0$ hat dieses lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung $C_1, \ldots, C_n$

Beispiel

$$y''' - y' = 6e^{2x}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$$

$y_{hom} = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x}$

erraten: $y_{sp} = e^{2x}$

$y = e^{2x} + C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x}$

$y' = 2e^{2x} + C_2 e^{x} - C_3 e^{-x}$

$y'' = 4e^{2x} + C_2 e^{x} - C_3 e^{-x}$

$$\text{AB: } \left.\begin{aligned} 1 + C_1 + C_2 + C_3 &= 1 \\ 2 + C_2 - C_3 &= 0 \\ 4 + C_2 + C_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} C_1 &= 4 \\ C_2 &= -3 \\ C_3 &= -1 \end{aligned}$$

Lösung d. AWP:

$$y = e^{2x} + 4 - 3e^{x} - e^{-x}$$

Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ Konstanten,
b stetige Funktion auf Intervall I (häufig $I = \mathbb{R}$)

1. Schritt: Lösen der homogenen Gleichung

Ansatz:

"probiere" $y = e^{\lambda x}$

k-te Ableitung ist $y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$

$$L[e^{\lambda x}] = \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} \underbrace{(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1 \lambda + a_0)}_{= 0} \overset{!}{=} 0$$

1. Schritt: Lösen der homogenen Gleichung

Ansatz:
"probiere" $y = e^{\lambda x}$
k-te Ableitung ist $y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$

Somit gilt:

$$L[y] = e^{\lambda x}\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right)$$

$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ heißt charakteristisches Polynom

- $P(\lambda) = 0 \implies e^{\lambda x}$ eine Lösung der homogenen DGL
- verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \implies$ linear unabhängige Lösungen $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_r x}$
- falls $r = n \implies$ Fundamentalsystem

Beispiel

$y''' - y' = 0$

$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda$

$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = -1$

Fundamentalsystem: $y_1 = e^{\lambda_1 x} = 1$

$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{x}$

$y_3 = e^{\lambda_3 x} = e^{-x}$

allg. Lsg.: $y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x}$

Beispiel

$y'''' + y'' = 0$

$P(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2$

$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ (und komplexe Lösungen $\lambda = i$, $\lambda = -i$)

Ansatz liefert nur $y_1 = 1$

weitere Lösungen: $y_2 = x$ $\rightsquigarrow$ $\lambda = 0$ doppelte Nullstelle

$$\left.\begin{aligned} y_3 &= \cos x \\ y_4 &= \sin x \end{aligned}\right\} \text{komplexe Nullstellen}$$

Für $z \in \mathbb{C}$ bezeichnet $\mu(z)$ die Vielfachheit der Nullstelle z des charakteristischen Polynoms P

$$\mu(z) = \begin{cases} 0 & \iff \quad \begin{array}{l} P(z) \neq 0 \\ (z \text{ ist keine Nullstelle}) \end{array} \\[2em] 1 & \iff \quad \begin{array}{l} P(z) = 0, P'(z) \neq 0 \\ (\text{einfache Nullstelle}) \end{array} \\[2em] 2 & \iff \quad \begin{array}{l} P(z) = 0, P'(z) = 0, P''(z) \neq 0 \\ (\text{doppelte Nullstelle}) \end{array} \\[2em] k & \iff \quad \begin{array}{l} P(z) = 0, P'(z) = 0, \dots, P^{(k-1)}(z) = 0, P^{(k)}(z) \neq 0 \\ (k\text{-fache Nullstelle}) \end{array} \end{cases}$$

Erinnerung

$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ alle reellen Nullstellen von $P(\lambda)$

konjugiert komplexe Zahl

$z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_s, \bar{z}_s$ alle komplexen Nullstellen von $P(\lambda)$
(wenn z eine komplexe Nullstelle ist, dann auch $\bar{z}$, und die Vielfachheiten stimmen überein)

Dann ist

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu(\lambda_1)} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\mu(\lambda_r)} \cdot \Big((\lambda - z_1)(\lambda - \bar{z}_1)\Big)^{\mu(z_1)} \cdots \Big((\lambda - z_s)(\lambda - \bar{z}_s)\Big)^{\mu(z_s)}$$

und

$$\mu(\lambda_1) + \cdots + \mu(\lambda_r) + 2\mu(z_1) + \cdots + 2\mu(z_s) = n$$

Beispiel: mehrfache Nullstelle

$y'''' - 2y''' + 2y' - y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda - \lambda = (\lambda+1)(\lambda-1)^3$

Nullstellen: $\lambda_1 = -1$, $\mu(-1) = 1 \to$ Lösung $y_1 = e^{-x}$

$\lambda_2 = 1$, $\mu(1) = 3 \to$ Lösung $y_2 = e^{x}$

probieren: $y_3 = x e^{x}$

$y_4 = x^2 e^{x}$

$y_3 = x e^{x}$, $y_3' = (1+x)e^{x}$, $y_3'' = (2+x)e^{x}$, $y_3''' (3+x)e^{x}$, $y_3'''' (4+x)e^{x}$

$L[y_3] = (4+x)e^{x} - 2(3+x)e^{x} + 2(1+x)e^{x} - x e^{x} = 0$

Analoge Rechnung: $L[y_4] = 0$

Lineare Unabhängigkeit:

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) & \cdots & y_4(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) & \cdots & \vdots \\ y_1''(0) & y_2''(0) & \cdots & \vdots \\ y_1'''(0) & y_2'''(0) & \cdots & y_4'''(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem.

allg. Lsg: $y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x + C_4 x^2) e^x$

Satz

- λ eine reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms mit Vielfachheit μ, dann sind

$$e^{\lambda x}, \quad xe^{\lambda x}, \quad x^2 e^{\lambda x}, \dots, \quad x^{\mu-1} e^{\lambda x}$$

  linear unabhängige Lösungen von $L[y] = 0$

- $z, \bar{z}$ konjugiert komplexe Nullstellen mit Vielfachheit μ, $z = \alpha + i\beta$, dann sind

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad xe^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, \quad x^{\mu-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$e^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad xe^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, \quad x^{\mu-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

  linear unabhängige Lösungen von $L[y] = 0$

- Die Gesamtheit all dieser Lösungen bildet ein Fundamentalsystem

Beispiel

$$y^{(5)} - 4y^{(4)} + 7y''' - 6y'' + 2y' = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^4 + 7\lambda^3 - 6\lambda^2 + 2\lambda$$

$$= (\lambda - 0)(\lambda - 1)^2 (\lambda - (i+1))(\lambda - (i-1))$$

$r = 2 \qquad \lambda_1 = 0, \quad \mu(0) = 1$

$\qquad\qquad \lambda_2 = 1, \quad \mu(1) = 2$

$s = 1 \qquad z_1 = 1 + i, \quad \bar{z}_1 = 1 - i \qquad \mu(z_1) = \mu(\bar{z}_1) = 1$

Fundamentalsystem:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = 1 \quad \Big\} \ \lambda_1 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= e^{\lambda_2 x} = e^{x} \\ y_3 &= x e^{\lambda_2 x} = x e^{x} \end{aligned}\right\} \ \lambda_2 = 1$$

, 2 Lösungen weil $\mu(1) = 2$

$$\left.\begin{aligned} y_4 &= e^{x} \cos x \\ y_5 &= e^{x} \sin x \end{aligned}\right\} \ z_1, \ \overline{z}_1$$

2 Lösungen weil konjugiert komplexe Nullstellen.

Allg. Lsg: $y = C_1 + (C_2 + C_3 x) e^{x} + (C_4 \cos x + C_5 \sin x) e^{x}$