Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ stetige Funktionen auf einem Intervall I

Kurzschreibweise $L[y] = b(x)$

L ist der Operator, der jeder n-mal stetig differenzierbaren Funktion y die neue Funktion

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$$

zuordnet.

Satz

Die allgemeine und vollständige Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung ist

$$y = y_{\text{hom}} + y_{\text{sp}},$$

wobei
y_{hom} die allgemeine Lösung der homogenen DGL $L[y] = 0$ und
y_{sp} eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

Lösen des AWPs

- 1. Schritt: löse homogene Gleichung
- 2. Schritt: finde eine Lösung der inhomogenen Gleichung
- 3. Schritt: bestimme Konstanten durch Einsetzen der Anfangswerte

Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ Konstanten,
b stetige Funktion auf Intervall I (häufig $I = \mathbb{R}$)

Charakteristisches Polynom:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

1. Schritt: Lösen der homogenen Gleichung

Satz

- λ eine reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms mit Vielfachheit μ, dann sind

$$e^{\lambda x}, \quad xe^{\lambda x}, \quad x^2 e^{\lambda x}, \dots, \quad x^{\mu-1} e^{\lambda x}$$

  linear unabhängige Lösungen von $L[y] = 0$

- $z, \bar{z}$ konjugiert komplexe Nullstellen mit Vielfachheit μ, $z = \alpha + i\beta$, dann sind

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad xe^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, \quad x^{\mu-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$e^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad xe^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, \quad x^{\mu-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

  linear unabhängige Lösungen von $L[y] = 0$

  Basis des Lösungsraumes

- Die Gesamtheit all dieser Lösungen bildet ein Fundamentalsystem

2. Schritt: Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

Methoden

- Ansatzmethode:
  stark abhängig von der Form von $b(x)$ → für lin. DGLn mit konstanten koeff.
- Reduktion der Ordnung:
  Substitution führt auf DGL niedrigerer Ordnung → für lin DGLn 2. Ordnung.
- Variation der Konstanten:
  n Konstanten $\to$ zusätzliche Bedingungen können die Lösung vereinfachen

Spezielle Lösung durch Ansatz (konst. Koeff.!)

Satz

Ist μ die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms und $q(x)$ ein Polynom, dann gilt

$$L\left[x^{\mu}q(x)e^{\lambda x}\right] = p(x)e^{\lambda x}$$

für ein Polynom vom Grad $\deg p = \deg q$.

Gegeben

$L[y] = b(x)$ lineare DGL mit konstanten Koeffizienten,

$b(x) = p(x)e^{\lambda x}$ für ein Polynom p

Ansatz für spezielle Lösung

$$y_{sp} = x^{\mu} q(x) e^{\lambda x}$$

- $q(x)$ ist ein Polynom mit unbekannten Koeffizienten mit $\deg p = \deg q$
- μ ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms

Einsetzen in DGL und Koeffizientenvergleich liefert ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten

Bemerkung: falls $\mu > 0$, so spricht man von äußerer Resonanz

$\mu > 1$ innerer Resonanz

Beispiel

$y'' - 4y' + 4y = 3xe^{2x}$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \stackrel{!}{=} 0$

$\lambda_1 = 2, \quad \mu(2) = 2 \Rightarrow y_{hom} = (C_1 + x \cdot C_2) e^{2x}$

$b(x) := 3x \cdot e^{2x}, \quad \mu(2) = 2 \Rightarrow$ äußere Resonanz.

$y_{sp} = x^2 \cdot (A_0 + A_1 \cdot x) \cdot e^{2x} = (A_0 x^2 + A_1 x^3) e^{2x}$

$y_{sp}' = (2A_1 x^3 + (2A_0 + 3A_1) x^2 + 2A_0 x) e^{2x}$

$y_{sp}'' = (4A_1 x^3 + (4A_0 + 12A_1) x^2 + (8A_0 + 6A_1) x + 2A_0) e^{2x}$

einsetzen: $\left(\underline{6A_1}\,x + \underline{2A_0}\right) e^{2x} = \left(\underline{3}\,x + \underline{0}\right) e^{2x}$

koeffizientenvgl.:
$$\left.\begin{aligned} 6A_1 &= 3 \qquad & A_1 &= \tfrac{1}{2} \\ 2A_0 &= 0 \qquad & A_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad y_{sp} = \frac{1}{2} \cdot x^3 e^{2x}$$

$$y = y_{hom} + y_{sp} = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2} x^3\right) e^{2x}$$

Beispiel

$y'' + y = (x + 2x^2)\, e^{0 \cdot x}$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 1 \overset{!}{=} 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm i \qquad \mu(\pm i) = 1$

$y_{hom} = C_1 \cos x + C_2 \cdot \sin x$

$b(x) = (x + 2x^2)\, e^{0x}, \qquad \mu(0) = 0 \rightsquigarrow$ keine äußere Resonanz.

$y_{sp} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$

$y_{sp}' = A_1 + 2 A_2 x$

$y_{sp}'' = 2 A_2$

Einsetzen: $A_2 x^2 + A_1 x + A_0 + 2 A_2 = x + 2 x^2$

Koeffizientenvergleich:

$x^2: \quad A_2 = 2$

$x^1: \quad A_1 = 1$

$x^0: \quad A_0 + 2 A_2 = 0 \Rightarrow A_0 = -4$

$y_{sp} = 2 x^2 + x - 4$

$y = y_{hom} + y_{sp} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2 x^2 + x - 4$

Gegeben

$L[y] = b(x)$ lineare DGL mit konstanten Koeffizienten,

$b(x) = \Big(p_1(x)\cos(\beta x) + p_2(x)\sin(\beta x)\Big)e^{\alpha x}$ für Polynome p_1, p_2

Ansatz für spezielle Lösung

$$y_{sp} = x^{\mu}\Big(q_1(x)\cos(\beta x) + q_2(x)\sin(\beta x)\Big)e^{\alpha x}$$

- q_1, q_2 sind Polynome vom Grad $\max(\deg p_1, \deg p_2)$ mit unbekannten Koeffizienten
- μ ist die Vielfachheit von $\alpha + i\beta$ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms

Einsetzen in DGL und Koeffizientenvergleich liefert ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten

Vorsicht: immer Cosinus und Sinus verwenden, auch wenn $b(x)$ nur eines der beiden enthält

Beispiel

$y'' + 4y = \sin 2x$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 4 \qquad \lambda_{1,2} = \pm 2i \;, \quad \mu(\pm 2i) = 1$

$y_{hom} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

$b(x) = (\sin 2x)\, e^{0x} \qquad \mu(0 + 2i) = 1 \Rightarrow$ äußere Resonanz.

$y_{sp} = x \cdot A_0 \cdot \cos 2x + x \cdot B_0 \cdot \sin 2x$

$y_{sp}' = (A_0 + 2B_0 x) \cos 2x + (B_0 - 2A_0 x) \sin 2x$

$y_{sp}'' = (4B_0 - 4A_0 x) \cos 2x + (-4A_0 - 4B_0 x) \sin 2x$

einsetzen: $4 B_0 \cos 2x - 4 A_0 \sin 2x = \sin 2x$

Koeff. vgl.: $\cos 2x$: $4 B_0 \stackrel{!}{=} 0$ $\quad B_0 = 0$

$\sin 2x$: $-4 A_0 \stackrel{!}{=} 1$ $\quad A_0 = -\frac{1}{4}$

$$y_{sp} = -\frac{1}{4} x \cos 2x$$

$$y = y_{hom} + y_{sp} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x$$

Beispiel

$$y'' - 4y' + 4y = (x^2 + 3)e^{2x} \sin 2x$$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$

$\lambda_1 = 2 \;,\; \mu(2) = 2 \Rightarrow y_{hom} = (C_1 + C_2 x)\, e^{2x}$

$\mu(2+2i) = 0 \Rightarrow$ keine äußere Resonanz.

$y_{sp} = (A_0 + A_1 x + A_2 x^2)\, e^{2x} \cos 2x + (B_0 + B_1 x + B_2 x^2)\, e^{2x} \sin 2x$

; ableiten, einsetzen, Koeffizientenvergleich.

$$\left.\begin{matrix} A_0 = 0 \;,\; A_1 = -\frac{1}{2} \;,\; A_2 = 0 \\ B_0 = -\frac{3}{8} \;,\; B_1 = 0 \;,\; B_2 = -\frac{1}{4} \end{matrix}\right\} \quad y_{sp} = -\frac{1}{2} x\, e^{2x} \cos 2x + \left(-\frac{3}{8} - \frac{1}{4} x^2\right) e^{2x} \sin 2x$$

Gegeben

$L[y] = b_1(x) + b_2(x) + \cdots + b_m(x)$ lineare DGL mit konstanten Koeffizienten,

$b_1, \ldots, b_m$ haben eine der beiden zuvor behandelten Formen

Ansatz für spezielle Lösung

$$y_{sp} = y_{sp,1} + y_{sp,2} + \cdots + y_{sp,m}$$

- $y_{sp,i}$ ist der Ansatz für die spezielle Lösung der Gleichung $L[y] = b_i(x)$

Einsetzen in DGL und Koeffizientenvergleich liefert ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten

Beispiel

$$y'' + y = \underbrace{x^2}_{b_1} + \underbrace{\sin x}_{b_2}$$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 1$, $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\mu(\pm i) = 1$

$y_{hom} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$b_1 = x^2 \cdot e^{0x}$, $\mu(0) = 0 \Rightarrow$ keine äußere Resonanz.

Ansatz $y_{sp,1}(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$

$y_{sp,1}'(x) = A_1 + 2 A_2 x$

$y_{sp,1}''(x) = 2 A_2$

einsetzen: $A_0 + 2A_2 + A_1 x + A_2 x^2 = x^2$

Koeff.vgl.: $\left.\begin{aligned} x^2 &: \quad A_2 = 1 \\ x^1 &: \quad A_1 = 0 \\ x^0 &: \quad A_0 + 2A_2 = 0 \Rightarrow A_0 = -2 \end{aligned}\right\} \quad y_{sp,1} = x^2 - 2$

$b_2 = \sin x \cdot e^{0x}$, $\mu(0+i) = 1$ $\Rightarrow$ äußere Resonanz.

Ansatz: $y_{sp,2} = x \cdot A_0 \cdot \cos x + x \cdot B_0 \cdot \sin x$

$y'_{sp,2} = (A_0 + x B_0) \cos x + (B_0 - x A_0) \sin x$

$y''_{sp,2} = (2B_0 - A_0 x) \cos x + (-2A_0 - B_0 x) \sin x$

einsetzen:

$$2 B_0 \cos x - 2 A_0 \sin x = \sin x$$

Koeff. vgl.: $\left.\begin{array}{ll} \cos x: & 2 B_0 = 0 \\ \sin x: & -2 A_0 = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} B_0 = 0 \\ A_0 = -\frac{1}{2} \end{array}$

$$y_{sp,2} = -\frac{1}{2} x \cos x$$

$$y_{sp} = y_{sp,1} + y_{sp,2} = x^2 - 2 - \frac{1}{2} x \cos x$$

$$y = y_{hom} + y_{sp} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2 - \frac{1}{2} x \cos x$$

2. Schritt: Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

Methoden

- Ansatzmethode:
  stark abhängig von der Form von $b(x)$

- Reduktion der Ordnung:
  Substitution führt auf DGL niedrigerer Ordnung

- Variation der Konstanten:
  n Konstanten $\rightarrow$ zusätzliche Bedingungen können die Lösung vereinfachen

Reduktion der Ordnung

Gegeben

lineare DGL 2. Ordnung $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$

spezielle Lösung $y_1 \neq 0$ der homogenen DGL bekannt

Substitution: $y(x) = y_1(x)u(x)$

$$y' = y_1' \cdot u + y_1 \cdot u'$$

$$y'' = y_1'' \cdot u + 2 \cdot y_1' u' + y_1 \cdot u''$$

$$\underline{y_1'' \cdot u} + 2 \cdot y_1' u' + y_1 \cdot u'' + \underline{a_1 y_1' \cdot u} + a_1 \cdot y_1 \cdot u' + \underline{a_0 \cdot y_1 \cdot u} = b$$

$$u'' \cdot y_1 + u'(2y_1' + a_1 y_1) = b$$

Reduktion der Ordnung

Gegeben

lineare DGL 2. Ordnung $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$

spezielle Lösung $y_1 \neq 0$ der homogenen DGL bekannt

Substitution: $y(x) = y_1(x)u(x)$

Lineare DGL 1. Ordnung für u':

$$u'' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + a_1\right) u' = \frac{b}{y_1}$$

Beispiel

$$(x^2 + x^4)y'' - 2xy' + 2y = x^3 + x^5, \quad y_1(x) = x$$

Setzen $y = x \cdot u \quad \Rightarrow \quad u'' + \frac{2x}{1+x^2} u' = 1$

Setze $v = u'$

$$v' + \frac{2x}{1+x^2} v = 1$$

Homogene Lsg.: $\frac{v'}{v} = -\frac{2x}{1+x^2} \rightsquigarrow v_{hom} = \frac{c}{1+x^2}$

Variation der Konst.: $v_{sp} = \frac{c(x)}{1+x^2}$, $v_{sp}' = \frac{c'(x)}{1+x^2} - \frac{2x\, c(x)}{(1+x^2)^2}$

$$\frac{c'(x)}{1+x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad c(x) = x + \frac{x^3}{3} + c_1$$

$$v(x) = \frac{x + \frac{1}{3}x^3 + C_1}{1 + x^2}$$

$$u(x) = \int v(x)\,dx = \int \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\frac{2x}{1+x^2} + \frac{C_1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{6} + \frac{1}{3}\ln(1+x^2) + C_1 \arctan x + C_2$$

$$y(x) = u(x) \cdot x = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{3}\ln(1+x^2) + C_1 x \arctan x + C_2 x$$

Variation der Konstanten

Gegeben

lineare DGL 2. Ordnung $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$

allgemeine Lösung $y_{\text{hom}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ der homogenen DGL

Ansatz für spezielle Lösung:

$$y_{\text{sp}} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \quad \text{mit } C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$$

$$y_{sp}' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$$

$$y_{sp}'' = C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2''$$

einsetzen: $C_1' y_1' + C_2' y_2' + \underbrace{C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + a_1 C_1 y_1' + a_1 C_2 y_2' + a_0 C_1 y_1 + a_0 C_2 y_2}_{=0} = b$

Variation der Konstanten

Gegeben

lineare DGL 2. Ordnung $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$

allgemeine Lösung $y_{\text{hom}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ der homogenen DGL

Ansatz für spezielle Lösung:

$$y_{\text{sp}} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \quad \text{mit } C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)$$

Gleichungssystem für C_1', C_2':

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 &= 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' &= b(x) \end{aligned}$$

$$C_1' = -\frac{b \cdot y_2}{W(x)} \qquad C_2' = \frac{b \cdot y_1}{W(x)}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Beispiel

$$(x^2 + x^4)y'' - 2xy' + 2y = x^3, \quad y_{\text{hom}} = C_1 x + C_2 x \arctan x$$

$$b(x) = \frac{x^3}{x^2 + x^4} = \frac{x}{1+x^2}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x \arctan x \\ 1 & \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \end{vmatrix} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$C_1 = C_1(x), \quad C_2 = C_2(x)$$

$$C_1' = -\frac{b\, y_2}{W} = -\frac{x}{1+x^2} \cdot x \cdot \arctan x \cdot \frac{1+x^2}{x^2} = -\arctan x$$

$$C_2' = \frac{b \cdot y_1}{W} = \frac{x}{1+x^2} \cdot x \cdot \frac{1+x^2}{x^2} = 1$$

integrieren:

$$C_1(x) = \ln\sqrt{1+x^2} - x \arctan x + \tilde{C}_1$$

$$C_2(x) = x + \tilde{C}_2$$

$$y = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)$$

$$= x \ln\sqrt{1+x^2} - \underline{x^2 \arctan} x + \tilde{C}_1 \cdot x + \underline{x^2 \arctan x} + \tilde{C}_2 x \arctan x$$

$$= \underbrace{x \ln\sqrt{1+x^2}}_{y_{sp}} + \underbrace{\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2 x \cdot \arctan x}_{y_{hom}}$$