Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung

DGL. 1. Ordnung

$$y' = f(x, y)$$

Gleichungssystem

$$f_1(x_1, \ldots x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, \ldots x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, \ldots x_n) = 0$$

Ein (explizites) System von Differentialgleichungen 1. Ordnung hat die Form

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

wobei

- x eine Variable
- $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (unbekannte) Funktionen, und
- $f_1, f_2, \ldots, f_n$ Funktionen mit gemeinsamen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ sind

Ein Anfangswertproblem besteht aus einem System von DGLn und Anfangswerten $(x_0, w_1, w_2, \ldots, w_n) \in D$ $\quad y_1(x_0) = w_1, \; y_2(x_0) = w_2, \ldots, \; y_n(x_0) = w_n$

Vektorschreibweise

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad F(x, \vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, \vec{y}) \\ f_2(x, \vec{y}) \\ \vdots \\ f_n(x, \vec{y}) \end{pmatrix}$$

$\vec{y}$ .. unbekannte Fkt : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Wir schreiben Systeme von DGLn als

$$\vec{y}' = F(x, \vec{y})$$

und AWPe als

$$\vec{y}' = F(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{w}$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Intervall $\qquad\qquad\qquad\qquad$ definiert auf D

$\vec{y}\colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt Lösung eines Systems von DGLn $\vec{y}' = F(x, \vec{y})$, falls

- $(x, \vec{y}(x)) \in D$ für alle $x \in I$
- $\vec{y}(x)$ erfüllt die DGL für alle $x \in I$

Falls außerdem $\vec{y}(x_0) = \vec{w}$, so nennen wir $\vec{y}$ Lösung des entsprechenden AWPs

lokale Lsg des AWP : Lösung in Umgebung von x_0

globale Lsg : Lösung, die auf ganz I definiert ist

(I ist Teil der Problemstellung)

Bemerkung

Es ist auch üblich

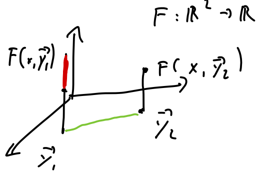
- t für die unabhängige Variable,
- $\vec{x}$ für die abhängige Variable und
- $\dot{\vec{x}}$ für die Ableitung zu schreiben

Interpretation: $\vec{x}$ ist zeitabhängiger Ortsvektor, $\dot{\vec{x}}$ ist Geschwindigkeitsvektor, ...

Gegeben: $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $F\colon D \to \mathbb{R}^n$ für $n = 1$ bereits bekannt.

- $F(x, \vec{y})$ erfüllt bezüglich $\vec{y}$ eine globale Lipschitzbedingung, wenn es $L \geq 0$ gibt, sodass

$$\underline{\|F(x, \vec{y}_1) - F(x, \vec{y}_2)\|} \leq L \cdot \|\underline{\vec{y}_1 - \vec{y}_2}\|$$



für alle $(x, \vec{y}_1), (x, \vec{y}_2) \in D$. L heißt Lipschitzkonstante.

- $F(x, \vec{y})$ erfüllt bezüglich $\vec{y}$ eine lokale Lipschitzbedingung, wenn es zu jedem Punkt $(x_0, \vec{y}_0) \in D$ eine Umgebung U und eine Zahl $L \geq 0$ gibt, sodass

$$\|F(x, \vec{y}_1) - F(x, \vec{y}_2)\| \leq L \cdot \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$$

für alle $(x, \vec{y}_1), (x, \vec{y}_2) \in U$.

Satz

- Falls alle partiellen Ableitungen von F auf D beschränkt sind, so erfüllt F auf D bezüglich $\vec{y}$ eine globale Lipschitzbedingung.

- Ist F stetig partiell differenzierbar, so erfüllt F auf D bezüglich $\vec{y}$ eine lokale Lipschitzbedingung.

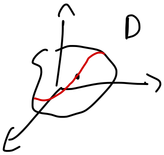
Satz (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

$F(x, \vec{y})$ sei auf D stetig und erfülle bezüglich $\vec{y}$ eine lokale Lipschitzbedingung.

Dann gibt es zu jedem $(x_0, \vec{w}) \in D$ eine eindeutige Lösungskurve für das AWP

$$\vec{y}' = F(x, \vec{y}), \qquad \vec{y}(x_0) = \vec{w},$$

die sich beidseitig bis zum Rand von D erstreckt



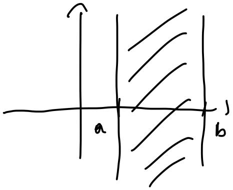
Lösungskurven

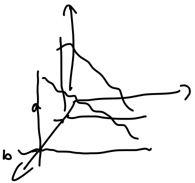
- schneiden einander nicht
- hören nicht auf.

Anmerkungen

- der Rand von D kann auch "im Unendlichen" liegen

- globale Lipschitzbedingung in einem "Streifen" $\{(x,\vec{y}) \mid a \leq x \leq b, \vec{y} \in \mathbb{R}^n\}$ garantiert globale Existenz von Lösungen auf diesem Streifen





Bemerkung

Differentialgleichungen n-ter Ordnung lassen sich in Systeme 1. Ordnung überführen.

Gegeben

explizite DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y', y'', \ldots, y^{(n-1)} \cancel{)}, y)$$

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'' \ldots \quad y_n = y^{(n-1)}$$

$$y_n' = f(x, y_1, y_2 \ldots y_n)$$

$$y_1' = y_2 \qquad y_2' = y_3 \qquad y_3' = y_4 \quad \ldots \quad y_{n-1}' = y_n$$

Bemerkung

Differentialgleichungen n-ter Ordnung lassen sich in Systeme 1. Ordnung überführen.

Gegeben

explizite DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

Äquivalentes System 1. Ordnung:

$$\vec{y}' = F(x, \vec{y}) \quad \text{mit} \quad F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$y''' = (x^2 + (y')^2 - (y'')^2)e^{xy}$$

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_3$$

$$y_3' = f(x, y_1, y_2, y_3) = (x^2 + y_2^2 - y_3^2)\, e^{x y_1}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ (x^2 + y_2^2 - y_3^2)\, e^{x y_1} \end{pmatrix}$$

Ein lineares System von DGLn 1. Ordnung hat die Form

$$\vec{y}' = \underbrace{A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)}_{F(x, \vec{y})}$$

mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

mit stetigen Funktionen a_{ij} und b_j

Das System heißt homogen, falls $\vec{b}(x) = \vec{0}$, und inhomogen andernfalls.

Satz

Die allgemeine und vollständige Lösung des linearen Systems $\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$ ist

$$\vec{y} = \vec{y}_{\text{hom}} + \vec{y}_{\text{sp}},$$

wobei

$\vec{y}_{\text{hom}}$ die allgemeine Lösung des homogenen Systems $\vec{y}' = A(x)\vec{y}$ und

$\vec{y_{\text{sp}}}$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ist.

Beobachtung

Linearkombinationen von Lösungen des homogenen Systems sind ebenfalls Lösungen des homogenen Systems

Die Lösungsmenge

$$\{\vec{y}\colon I \to \mathbb{R}^n \mid \vec{y}' = A(x)\vec{y} \text{ auf ganz } I\}$$

ist ein Vektorraum der Dimension n.

Definition

Linear unabhängige Lösungen $\vec{y}^{[1]}, \vec{y}^{[2]}, \dots, \vec{y}^{[n]}$ von $\vec{y}' = A(x)\vec{y}$ heißen Fundamentalsystem.

Jede Lösung der homogenen DGL hat die eindeutige Form

$$\vec{y} = C_1\vec{y}^{[1]} + C_2\vec{y}^{[2]} + \cdots + C_n\vec{y}^{[n]} \qquad \text{mit } C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$$

$$y^{(n)} = a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_1 y' + a_0 y + b$$

Fundamentalsystem: $y_1, y_2, \dots, y_n$ für homogene DGL

äquivalentes System:

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 1 \\ 0 & & & & \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Fundamentalsystem für lin. System von DGLn:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)} \end{pmatrix}, \dots$$

Die Fundamentalmatrix eines Systems $\vec{y}^{[1]}, \vec{y}^{[2]}, \ldots, \vec{y}^{[n]}$ von Lösungen ist

$$\vec{y}^{[1]} = \begin{pmatrix} y^{[1]}_1 \\ y^{[1]}_2 \\ \vdots \\ y^{[1]}_n \end{pmatrix}$$

$$Y(x) := \begin{pmatrix} \vec{y}^{[1]}(x) & \vec{y}^{[2]}(x) & \cdots & \vec{y}^{[n]}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^{[1]}(x) & y^{[2]}(x)_1 & \cdots & y_2^{[n]}(x) \\ y_2^{[1]}(x) & y^{[2]}(x)_2 & \cdots & y_2^{[n]}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^{[1]}(x) & y^{[2]}(x)_n & \cdots & y_n^{[n]}(x) \end{pmatrix}$$

Satz

Die Lösungen $\vec{y}^{[1]}, \vec{y}^{[2]}, \ldots, \vec{y}^{[n]}$ sind genau dann ein Fundamentalsystem, wenn

$$W(x) := \det Y(x) \neq 0$$

für ein ($\iff$ alle) $x \in I$

$W(x)$ heißt Wronski-Determinante.

Beispiel

Homogenes System: $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$

"erraten" Lösungen $\quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ $\quad$ einsetzen: $\begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$

$x^{(2)} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

Fundamentalsystem? $\quad W(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$\Rightarrow \vec{y}_{hom} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

Auffinden einer speziellen Lösung: Variation der Konstanten

Allgemeine Lösung des homogenen Systems:

$$\vec{y}_{\text{hom}} = C_1 \vec{y}^{[1]} + C_2 \vec{y}^{[2]} + \cdots + C_n \vec{y}^{[n]} = Y(x) \cdot \vec{C}$$

Ersetze $\vec{C}$ durch eine Funktion $\vec{C}(x)$ und setze in die DGL ein

$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}$ Ansatz: $\vec{y} = C_1(x) \cdot \vec{y}^{[1]} + C_2(x) \cdot \vec{y}^{[2]} + \ldots + C_n(x)\, \vec{y}^{[n]} = Y(x) \cdot \vec{C}(x)$

$$\vec{y}\,' = \underline{C_1' \cdot \vec{y}^{[1]}} + \underline{C_1 \cdot (\vec{y}^{[1]})'} + \underline{C_2' \, \vec{y}^{[2]}} + \underline{C_2 \cdot (\vec{y}^{[2]})'} + \ldots$$

$$= \underline{Y(x) \cdot \vec{C}\,'(x)} + \underline{Y'(x) \cdot C(x)}$$

$$\underline{Y(x) \cdot \vec{C}\,'(x)} + \cancel{\underline{Y'(x)} \cdot \vec{C}(x)} = \cancel{\underline{A \cdot Y(x)} \cdot \vec{C}(x)} + \underline{\vec{b}(x)}$$

Auffinden einer speziellen Lösung: Variation der Konstanten

Allgemeine Lösung des homogenen Systems:

$$\vec{y}_{\text{hom}} = C_1\vec{y}^{[1]} + C_2\vec{y}^{[2]} + \cdots + C_n\vec{y}^{[n]} = Y(x) \cdot \vec{C}$$

Ersetze $\vec{C}$ durch eine Funktion $\vec{C}(x)$ und setze in die DGL ein, wir erhalten

$$C'(x) = Y(x)^{-1} \cdot \vec{b}(x)$$

Finde C durch komponentenweises Integrieren von C'.

Beispiel

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ rt \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_{hom} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Var. d. Konst.:

$$c'(t) = Y^{-1}(t) \cdot \vec{b}(t)$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$Y(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\vec{C}\,'(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r.t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -rt \sin t \\ r.t.\cos t \end{pmatrix}$$

$$\vec{C}(t) = \begin{pmatrix} \int -rt \sin t \, dt \\ \int r.t \cos t \, dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.(t \cos t - \sin t) + \tilde{c}_1 \\ r.(t \sin t + \cos t) + \tilde{c}_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_{sp} = Y(t) \, . \, \vec{C}(t) = \begin{pmatrix} r\,t \\ r \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_{hom} + \vec{x}_{sp} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\,t \\ t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t + rt \\ -C_1 \sin t + C_2 \cos t + t \end{pmatrix}$$