Ein lineares System von DGLn 1. Ordnung hat die Form

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$$

mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

mit stetigen Funktionen a_{ij} und b_j

Das System heißt homogen, falls $\vec{b}(x) = \vec{0}$, und inhomogen andernfalls.

Satz

Die allgemeine und vollständige Lösung des linearen Systems $\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$ ist

$$\vec{y} = \vec{y}_{\text{hom}} + \vec{y}_{\text{sp}},$$

wobei

$\vec{y}_{\text{hom}}$ die allgemeine Lösung des homogenen Systems $\vec{y}' = A(x)\vec{y}$ und

$\vec{y}_{\text{sp}}$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ist.

Lineares System mit konstanten Koeffizienten

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine (konstante) Matrix,

$\vec{b}\colon I \to \mathbb{R}^n$ ist eine stetige Funktion

Lösen des homogenen Systems $\vec{y}' = A\vec{y}$

Ansatz:
"probiere" $\vec{y} = e^{\lambda x}\vec{v}$ für einen konstanten Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$\vec{y}\,' = \lambda e^{\lambda x} \cdot \vec{v}$$

einsetzen: $\lambda \cdot e^{\lambda x} \cdot \vec{v} = A\left(e^{\lambda x} \cdot \vec{v}\right)$

$$\cancel{e^{\lambda x}} \cdot \lambda \cdot \vec{v} = \cancel{e^{\lambda x}} \cdot A \cdot \vec{v}$$

Lösen des homogenen Systems $\vec{y}' = A\vec{y}$

Ansatz:
“probiere” $\vec{y} = e^{\lambda x}\vec{v}$ für einen konstanten Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$

Einsetzen liefert

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$\vec{y} = e^{\lambda x}\vec{v}$ ist Lösung genau dann, wenn

- λ ist ein Eigenwert von A
- $\vec{v}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ

Wiederholung: Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition

- λ heißt Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wenn es $\vec{v} \neq \vec{0}$ gibt, sodass $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
- so ein $\vec{v}$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ

Eigenwerte sind (komplexe) Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Wiederholung: Eigenwerte und Eigenvektoren

algebraische Vielfachheit $\mu(\lambda)$: Vielfachheit von λ als Nullstelle von $P(\lambda)$

geometrische Vielfachheit $\nu(\lambda)$: Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren (in $\mathbb{C}^n$)

Es gilt: $\mu(\lambda) \geq \nu(\lambda) > 0$ oder $\mu(\lambda) = \nu(\lambda) = 0$

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ alle Nullstellen (reell oder komplex) von $P(\lambda)$ Dann ist

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu(\lambda_1)} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\mu(\lambda_r)}$$

und

$$\mu(\lambda_1) + \cdots + \mu(\lambda_r) = n$$

Beispiel

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}$$

Eigenwerte: $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \overset{!}{=} 0 \qquad \lambda_{1,2} = 1 \pm i$

Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 1+i$:

Löse $\left(A - (1+i)\, I\right) \cdot \vec{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -(1+i) \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = 0 \implies \vec{v}^{(1)} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1-i \qquad \vec{v}^{(2)} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}$

Fundamentalsystem:

$$\vec{y}^{[1]} = e^{(1+i)x}\begin{pmatrix}1\\-1+i\end{pmatrix} = e^{x}\left(\overbrace{\cos x + i\sin x}^{e^{ix}}\right)\begin{pmatrix}1\\-1+i\end{pmatrix}$$

$$= e^{x}\begin{pmatrix}\cos x\\-\cos x-\sin x\end{pmatrix} + i\,e^{x}\begin{pmatrix}\sin x\\\cos x-\sin x\end{pmatrix}$$

$$\vec{y}^{[2]} = e^{(1-i)\cdot x}\begin{pmatrix}1\\-1-i\end{pmatrix}$$

$$= e^{x}\begin{pmatrix}\cos x\\-\cos x-\sin x\end{pmatrix} - i\,e^{x}\begin{pmatrix}\sin x\\\cos x-\sin x\end{pmatrix}$$

Von komplexen zu reellen Lösungen

Beobachtungen

- Lösungen zu einem komplexen Eigenwert $\lambda = \alpha + i\beta$ sind komplexwertig
- Falls $\vec{y}(x)$ eine Lösung zum Eigenwert λ ist, dann ist $\overline{\vec{y}(x)}$ eine Lösung zum Eigenwert $\bar{\lambda}$
- Falls $\vec{y}(x)$ eine (komplexe) Lösung ist, dann sind $\operatorname{Re}\vec{y}(x)$ und $\operatorname{Im}\vec{y}(x)$ reelle Lösungen.

Übergang von komplexem zu reellem Fundamentalsystem

Ersetze die linear unabhängigen (komplexen) Lösungen

$$\vec{y}(x) \qquad \text{und} \qquad \overline{\vec{y}(x)}$$

durch die linear unabhängigen (reellen) Lösungen

$$\operatorname{Re}\vec{y}(x) = \operatorname{Re}\overline{\vec{y}(x)} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Im}\vec{y}(x) = -\operatorname{Im}\overline{\vec{y}(x)}$$

Beispiel

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}$$

$$\vec{y}^{(1)} = e^{x} \begin{pmatrix} \cos x \\ -\cos x - \sin x \end{pmatrix} + i\, e^{x} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Re} \vec{y}^{(1)} &= e^{x} \begin{pmatrix} \cos x \\ -\cos x - \sin x \end{pmatrix} \\ \operatorname{Im} \vec{y}^{(1)} &= e^{x} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{ reelles Fundamentalsystem.}$$

Sei λ ein (reeller oder komplexer) Eigenwert, wir schreiben $\mu = \mu(\lambda)$ und $\nu = \nu(\lambda)$

Ziel: μ linear unabhängige Lösungen $\vec{y}^{[1]}, \vec{y}^{[2]}, \ldots, \vec{y}^{[\mu]}$ zum Eigenwert λ

linear unabhängige Eigenvektoren

$$\vec{v}^{[1]}, \vec{v}^{[2]}, \ldots, \vec{v}^{[\nu]}$$

liefern linear unabhängige Lösungen

$$e^{\lambda x}\vec{v}^{[1]}, e^{\lambda x}\vec{v}^{[2]}, \ldots, e^{\lambda x}\vec{v}^{[\nu]}$$

- falls $\mu = \nu$: Ziel erreicht
- falls $\mu > \nu$: weitere Lösungen der Form

$$\vec{y} = e^{\lambda x}\vec{v}_0 + xe^{\lambda x}\vec{v}_1 + \cdots + x^k e^{\lambda x}\vec{v}_k$$

Beispiel

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix} \vec{y}$$

A reelle, symmetrische Matrix

$\Rightarrow$ alle EW reell und $\mu(\lambda) = r(\lambda)$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -3 & -3 \\ -3 & 8-\lambda & -3 \\ -3 & -3 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 24\lambda^2 - 165\lambda + 242$$

Nullstellen: $\lambda_1 = 2$ $\quad \mu(2) = 1 = r(2)$

$\lambda_2 = 11$ $\quad \mu(11) = 2 = r(11)$

Eigenvektoren:

$\lambda = 2$ Löse $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}^{[1]} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 11$ Löse $\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}^{[3]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{y}_{hom} = C_1 e^{2x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{11x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{11x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 10 \overset{!}{=} 0 \qquad \lambda_{1,2} = 3 \pm i \qquad \mu(3 \pm i) = 1$

Eigenvektoren:

$\lambda = 3 + i \qquad \begin{pmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} \cdot \vec{v}^{[1]} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}^{[1]} = \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{v}^{[2]} = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3 - i$

Komplexes Fundamentalsystem:

$$\vec{x}^{(1)} = e^{(3+i)t} \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}^{(2)} = e^{(3-i)t} \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}^{(1)} = e^{3t} (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= e^{3t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + i e^{3t} \begin{pmatrix} -\cos t + \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

Reelles Fundamentalsystem

$$\operatorname{Re} \vec{x}^{(1)} = e^{3t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Im} \vec{x}^{(1)} = e^{3t} \begin{pmatrix} -\cos t + \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

Fall $\mu = 2$, $\nu = 1$

Eigenvektor zum Eigenwert λ

Erste Lösung: $\vec{y}^{[1]} = e^{\lambda x}\vec{v}^{[1]}$

unbekannten Vektor

Ansatz für 2. Lösung: $\vec{y}^{[2]} = x e^{\lambda x}\vec{v}^{[1]} + e^{\lambda x}\vec{v}^{[2]}$

$$\left(\vec{y}^{[2]}\right)' = \lambda x e^{\lambda x}\vec{v}^{[1]} + e^{\lambda x}\vec{v}^{[1]} + \lambda e^{\lambda x}\vec{v}^{[2]} = \lambda\vec{y}^{[2]} + e^{\lambda x}\vec{v}^{[1]}$$

$$A\vec{y}^{[2]} = x\cdot e^{\lambda x}\cdot\underbrace{A\cdot\vec{v}^{[1]}}_{\lambda\cdot\vec{v}^{[1]}} + e^{\lambda x}A\cdot\vec{v}^{[2]} + \lambda e^{\lambda x}\vec{v}^{[2]} - \lambda e^{\lambda x}\cdot\vec{v}^{[2]}$$

$$= \lambda\cdot\vec{y}^{[2]} + e^{\lambda x}(A - \lambda I)\cdot\vec{v}^{[2]}$$

Einsetzen: $\cancel{\lambda\cdot\vec{y}^{[2]}} + \cancel{e^{\lambda x}}\boxed{\vec{v}^{[1]}} = \cancel{\lambda\cdot\vec{y}^{[2]}} + \cancel{e^{\lambda x}}\boxed{(A - \lambda I)\vec{v}^{[2]}}$

$\boxed{\text{Fall } \mu = 2,\ \nu = 1}$

Erste Lösung: $\vec{y}^{[1]} = e^{\lambda x}\vec{v}^{[1]}$

Ansatz für 2. Lösung: $\vec{y}^{[2]} = xe^{\lambda x}\vec{v}^{[1]} + e^{\lambda x}\vec{v}^{[2]}$

Einsetzen liefert

$$(A - \lambda I)\vec{v}^{[2]} = \vec{v}^{[1]}$$

Bemerkung

Man kann zeigen:

- dieses Gleichungssystem hat eine Lösung $\vec{v}^{[2]} \neq \vec{0}$
- die resultierende Lösung $\vec{y}^{[2]}$ des DGL-Systems ist von $\vec{y}^{[1]}$ linear unabhängig

Beispiel

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}$$

$p(\lambda) = (\lambda - 3)^2$ $\qquad \lambda_1 = 3 \quad , \quad \mu(3) = 2$

Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}^{(1)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}^{(1)} = e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ansatz: $\vec{y}^{(2)} = x\, e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{3x} \vec{v}^{(2)}$ $\qquad$ mit $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \vec{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \vec{v}^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1^{[2]} + v_2^{[2]} = 1 \Rightarrow \vec{v}^{[2]} = \begin{pmatrix} c \\ 1-c \end{pmatrix}$$

z. B.: $\vec{v}^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{y}^{[2]} = x e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hom Lösung:

$$\vec{y}_{hom} = C_1 \vec{y}^{[1]} + C_2 \cdot \vec{y}^{[2]} = e^{3x} \left(C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1+x \\ -x \end{pmatrix} \right)$$

Fall $\mu > \nu$ mit $\nu = 1$

Löse der Reihe nach:

$$(A - \lambda I)\vec{v}^{[1]} = \vec{0}, \quad (A - \lambda I)\vec{v}^{[2]} = \vec{v}^{[1]}, \quad (A - \lambda I)\vec{v}^{[3]} = \vec{v}^{[2]}, \quad \ldots \quad (A - \lambda I)\vec{v}^{[\mu]} = \vec{v}^{[\mu-1]}$$

Erhalte Lösungen $y^{[k]}$ für $1 \leq k \leq \mu$:

$$\begin{aligned}
\vec{y}^{[1]} &= e^{\lambda x}\vec{v}^{[1]} \\
\vec{y}^{[2]} &= e^{\lambda x}\vec{v}^{[2]} + x e^{\lambda x}\vec{v}^{[1]} \\
\vec{y}^{[3]} &= e^{\lambda x}\vec{v}^{[3]} + x e^{\lambda x}\vec{v}^{[2]} + \frac{1}{2}x^2 e^{\lambda x}\vec{v}^{[1]} \\
&\vdots \\
\vec{y}^{[k]} &= \frac{1}{0!}e^{\lambda x}\vec{v}^{[k]} + \frac{1}{1!}x e^{\lambda x}\vec{v}^{[k-1]} + \frac{1}{2!}x^2 e^{\lambda x}\vec{v}^{[k-2]} + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}e^{\lambda x}\vec{v}^{[1]} \cdot x^{k-1}
\end{aligned}$$

$$(A-\lambda I)\vec{v}^{[1]}=\vec{0}, \quad (A-\lambda I)\vec{v}^{[2]}=\vec{v}^{[1]}, \quad (A-\lambda I)\vec{v}^{[3]}=\vec{v}^{[2]}, \quad (A-\lambda I)\vec{v}^{[4]}=\vec{v}^{[3]}$$

$$\vec{y}^{[4]}=e^{\lambda x}\vec{v}^{[4]}+xe^{\lambda x}\vec{v}^{[3]}+\frac{1}{2}x^2e^{\lambda x}\vec{v}^{[2]}+\frac{1}{6}x^3e^{\lambda x}\vec{v}^{[1]}$$

$$\left(\vec{y}^{[4]}\right)' = \underbrace{\lambda e^{\lambda x}\vec{v}^{[4]} + e^{\lambda x}\cdot\vec{v}^{[3]}} + \underbrace{\lambda x e^{\lambda x}\vec{v}^{[3]} + x e^{\lambda x}\vec{v}^{[2]}} + \underbrace{\lambda \frac{x^2}{2} e^{\lambda x}\vec{v}^{[2]} + \frac{x^2}{2} e^{\lambda x}\vec{v}^{[1]}} + \underbrace{\lambda \frac{x^3}{6} e^{\lambda x}\vec{v}^{[1]}}$$

$$\vec{v}^{[3]} = A\vec{v}^{[4]} - \lambda\vec{v}^{[4]}$$

$$e^{\lambda x}\cdot A\cdot\vec{v}^{[4]} + xe^{\lambda x}A\cdot\vec{v}^{[3]} + \frac{x^2}{2}e^{\lambda x}A\vec{v}^{[2]} + \frac{x^3}{6}e^{\lambda x}A\vec{v}^{[1]}$$

$$= A\cdot\vec{y}^{[4]}$$

Beispiel

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -16 & -6 \end{pmatrix} \vec{y}$$

$$p(\lambda) = -(\lambda + 2)^3 \qquad \lambda_1 = -2 , \qquad \mu(-2) = 3$$

Eigenvektoren!

$$(A + 2I)\, \vec{v}^{(1)} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & -16 & -4 \end{pmatrix} \vec{v}^{(1)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(A + 2I)\,\vec{v}^{(2)} = \vec{v}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & -16 & -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{z.B.: } \vec{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & -16 & -4 \end{pmatrix} \vec{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{z.B.: } \vec{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Fundamentalsystem:

$$\vec{y}^{(1)} = e^{-2x} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}^{(2)} = e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + x\,e^{-2x} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}^{(3)} = e^{-2x} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + x\,e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} e^{-2x} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$