Erinnerung: Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Gegeben: $\vec{y}\,' = A\vec{y}$

Lösung: Fundamentalsystem setzt sich zusammen aus

- Für EW λ mit lin. unabh. EV $\vec{v}^{[1]}, \dots, \vec{v}^{[\mu(\lambda)]}$:

$$\vec{y}^{[1]} = e^{\lambda x}\vec{v}^{[1]}, \dots, \vec{y}^{[\mu(\lambda)]} = e^{\lambda x}\vec{v}^{[\mu(\lambda)]}$$

- Für EW λ mit $\nu(\lambda) = 1$ und $\mu(\lambda) \geq 2$:

$$\vec{y}^{[1]} = e^{\lambda x}\vec{v}^{[1]}, \quad \vec{y}^{[2]} = e^{\lambda x}\left(\vec{v}^{[2]} + x\vec{v}^{[1]}\right),$$

$$\dots, \qquad \vec{y}^{[\mu]} = e^{\lambda x}\left(\vec{v}^{[\mu]} + x\vec{v}^{[\mu-1]} + \dots + \frac{x^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\vec{v}^{[1]}\right),$$

wobei $\vec{v}^{[1]}$ EV und $(A - \lambda I)\vec{v}^{[j]} = \vec{v}^{[j-1]}$ für $j \geq 2$.

Inhomogene Systeme

Gegeben: $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$

Satz

Allgemeine Lösung $\vec{y} = \vec{y}_{\mathrm{h}} + \vec{y}_{\mathrm{sp}}$ *mit*

- $\vec{y}_{\mathrm{h}}$ *allg. Lösung des homogenen Systems*
- $\vec{y}_{\mathrm{sp}}$ *eine Lösung des inhomogenen Systems*

Wie findet man $\vec{y}_{\mathrm{sp}}$?

Ansatzmethode

Gegeben: $\vec{y}\,' = A\vec{y} + e^{\lambda x} \begin{pmatrix} P_1(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \end{pmatrix}$

Ansatz: $\vec{y}_{\mathrm{sp}} = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} Q_1(x) \\ \vdots \\ Q_n(x) \end{pmatrix}$

- Q_i Polynome vom Grad $\max\{\deg(P_1), \dots, \deg(P_n)\} + \mu(\lambda)$
- In DGL einsetzen $\longrightarrow$ Koeff' von Q_i
- $\vec{b}(x)$ Summe mehrerer Ausdrücke $\longrightarrow$ summiere Ansätze

Warnung!

Ansätze getrennt nach λ's

Gegeben: $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} xe^x \\ e^{2x} \end{pmatrix}, \quad \longrightarrow \quad \mu(1) = 0,\ \mu(2) = 1$

- Ansatz $\vec{y}_{\mathrm{sp}} = \cancel{\begin{pmatrix} (Ax + B)e^x \\ (Cx + D)e^{2x} \end{pmatrix}}$
- Aufteilen $\vec{b}(x) = e^x \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Ansätze $\vec{y}^{[1]}_{\mathrm{sp}} = e^x \begin{pmatrix} Ax + B \\ Cx + D \end{pmatrix}, \quad \vec{y}^{[2]}_{\mathrm{sp}} = e^{2x} \begin{pmatrix} Ex + F \\ Gx + H \end{pmatrix}$

Erinnerung: Variation der Konstanten

Gegeben: $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$

- Fundamentalsystem $\vec{y}^{[1]}, \ldots, \vec{y}^{[n]}$ des homogenen Systems
- Matrix $Y(x) = (\vec{y}^{[1]}, \ldots, \vec{y}^{[n]})$
- Löse $\vec{C}\,'(x) = Y(x)^{-1}\vec{b}(x)$ (integrieren)
- Spezielle Lösung
$$\vec{y}_{\mathrm{sp}}(x) = Y(x)\vec{C}(x).$$

Beispiel 1

Gegeben: $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} + e^{5x} \begin{pmatrix} 4x+9 \\ -4x-2 \end{pmatrix} + e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4x+2 \end{pmatrix}$

1. Schritt: Lösung des homogenen Systems

- $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5, \quad \text{EW } \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 5$
- EV zu λ_1: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- EV zu λ_2: $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\vec{y}_{\mathrm{h}} = c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Beispiel 1

Gegeben: $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} + e^{5x} \begin{pmatrix} 4x+9 \\ -4x-2 \end{pmatrix} + e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4x+2 \end{pmatrix}$

2. Schritt: Spezieller Ansatz für $e^{5x} \begin{pmatrix} 4x+9 \\ -4x-2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mu(5) = 1$

- $\vec{y}_{\mathrm{sp}}^{[1]} = e^{5x} \begin{pmatrix} Ax^2 + Bx + C \\ Dx^2 + Ex + F \end{pmatrix}$
- Linke Seite:

$$\begin{aligned} \vec{y}_{\mathrm{sp}}^{[1]\,\prime} &= e^{5x} \begin{pmatrix} 5Ax^2 + 5Bx + 5C \\ 5Dx^2 + 5Ex + 5F \end{pmatrix} + e^{5x} \begin{pmatrix} 2Ax + B \\ 2Dx + E \end{pmatrix} \\ &= e^{5x} \begin{pmatrix} 5Ax^2 + (2A+5B)x + (B+5C) \\ 5Dx^2 + (2D+5E)x + (E+5F) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel 1

Gegeben: $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} + e^{5x} \begin{pmatrix} 4x+9 \\ -4x-2 \end{pmatrix} + e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4x+2 \end{pmatrix}$

- Rechte Seite:

$$\begin{aligned}
\text{RHS} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} e^{5x} \begin{pmatrix} Ax^2+Bx+C \\ Dx^2+Ex+F \end{pmatrix} + e^{5x} \begin{pmatrix} 4x+9 \\ -4x-2 \end{pmatrix} \\
&= e^{5x} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ax^2+Bx+C \\ Dx^2+Ex+F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x+9 \\ -4x-2 \end{pmatrix} \right) \\
&= e^{5x} \begin{pmatrix} (A+2D)x^2 + (B+2E+4)x + (C+2F+9) \\ (4A+3D)x^2 + (4B+3E-4)x + (4C+3F-2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Beispiel 1

- Gleichsetzen

$$\text{LHS} = e^{5x}\begin{pmatrix} 5Ax^2 + (2A+5B)x + (B+5C) \\ 5Dx^2 + (2D+5E)x + (E+5F) \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{!}{=} \text{RHS} = e^{5x}\begin{pmatrix} (A+2D)x^2 + (B+2E+4)x + (C+2F+9) \\ (4A+3D)x^2 + (4B+3E-4)x + (4C+3F-2) \end{pmatrix}$$

- Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} 2A &= D \\ A + 2B &= E + 2 \\ B + 4C &= 2F + 9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} D &= 2A \\ D + E &= 2B - 2 \\ E + 2F &= 4C - 2 \end{aligned}$$

Beispiel 1

$$\begin{aligned} 2A &= D \\ A + 2B &= E + 2 \\ B + 4C &= 2F + 9 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} D &= 2A \\ D + E &= 2B - 2 \\ E + 2F &= 4C - 2 \end{aligned}$$

- Zweite Zeile: $E + 2 = A + 2B$ und $E + 2 = 2B - D = 2B - 2A$
- Also $A = -2A \implies A = 0 \implies D = 0$
- Einsetzen in zweite Zeile: $2B = E + 2$
- Dritte Zeile: $4C - 2F = -B + 9$ und $4C - 2F = E + 2 = 2B$
- Also $-B + 9 = 2B \implies B = 3 \implies E = 4$
- Einsetzen in dritte Zeile: $4C - 2F = 6$
- allg. Lös. $C = t$, $F = 2t - 3 \overset{t=1}{\implies} C = 1$, $F = -1$

Beispiel 1

Gegeben: $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} + e^{5x} \begin{pmatrix} 4x+9 \\ -4x-2 \end{pmatrix} + e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4x+2 \end{pmatrix}$

- $\vec{y}_{\mathrm{sp}}^{[1]} = e^{5x} \begin{pmatrix} 3x+1 \\ 4x-1 \end{pmatrix}$

Beispiel 1

Gegeben: $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} + e^{5x} \begin{pmatrix} 4x+9 \\ -4x-2 \end{pmatrix} + e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4x+2 \end{pmatrix}$

3. Schritt: Spezieller Ansatz für $e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4x+2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mu(1) = 0$

- $\vec{y}^{[2]}_{\mathrm{sp}} = e^{x} \begin{pmatrix} Ax+B \\ Cx+D \end{pmatrix}$
- Linke Seite:

$$\vec{y}^{[2]}_{\mathrm{sp}}{}' \quad = \quad e^{x} \begin{pmatrix} Ax+B \\ Cx+D \end{pmatrix} + e^{x} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = e^{x} \begin{pmatrix} Ax+(A+B) \\ Cx+(C+D) \end{pmatrix}$$

Beispiel 1

Gegeben: $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} + e^{5x} \begin{pmatrix} 4x+9 \\ -4x-2 \end{pmatrix} + e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4x+2 \end{pmatrix}$

- Rechte Seite:

$$\begin{aligned}
\text{RHS} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} e^{x} \begin{pmatrix} Ax+B \\ Cx+D \end{pmatrix} + e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4x+2 \end{pmatrix} \\
&= e^{x} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ax+B \\ Cx+D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4x+2 \end{pmatrix} \right) \\
&= e^{x} \begin{pmatrix} (A+2C)x + (B+2D+1) \\ (4A+3C+4)x + (4B+3D+2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Beispiel 1

- Gleichsetzen

$$\mathrm{LHS} = e^x \begin{pmatrix} Ax + (A+B) \\ Cx + (C+D) \end{pmatrix}$$
$$\stackrel{!}{=} \mathrm{RHS} = e^x \begin{pmatrix} (A+2C)x + (B+2D+1) \\ (4A+3C+4)x + (4B+3D+2) \end{pmatrix}$$

- Koeffizientenvergleich

$$A = A + 2C \qquad C = 4A + 3C + 4$$
$$A + B = B + 2D + 1 \qquad C + D = 4B + 3D + 2$$

- $C = 0$, $A = -1$, $D = -1$, $B = 0$

Beispiel 1

Gegeben: $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} + e^{5x} \begin{pmatrix} 4x+9 \\ -4x-2 \end{pmatrix} + e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4x+2 \end{pmatrix}$

- $\vec{y}_{\mathrm{sp}}^{[2]} = e^{x} \begin{pmatrix} -x \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\vec{y} = \vec{y}_{\mathrm{h}} + \vec{y}_{\mathrm{sp}}^{[1]} + \vec{y}_{\mathrm{sp}}^{[2]}$

$$= c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{5x} \begin{pmatrix} 3x+1 \\ 4x-1 \end{pmatrix} + e^{x} \begin{pmatrix} -x \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{5x} \begin{pmatrix} 3x+1+c_2 \\ 4x-1+2c_2 \end{pmatrix} - e^{x} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2

Gegeben: $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} + \frac{e^{5x}}{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x > 0$

1. Schritt: Lösung des homogenen Systems

- $\vec{y}_{\mathrm{h}} = c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Schritt: Variation der Konstanten

- $Y(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{5x} \\ -e^{-x} & 2e^{5x} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det(Y(x)) = 3e^{4x}$
- $\vec{C}\,'(x) = \frac{1}{3e^{4x}} \begin{pmatrix} 2e^{5x} & -e^{5x} \\ e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix} \frac{e^{5x}}{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$
- $\vec{C}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \ln(x) \end{pmatrix}$

Beispiel 2

Gegeben: $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} + \frac{e^{5x}}{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x > 0$

- $\vec{y}_{\mathrm{sp}} = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{5x} \\ -e^{-x} & 2e^{5x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \ln(x) \end{pmatrix} = \ln(x) e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $$\begin{aligned} \vec{y} &= \vec{y}_{\mathrm{h}} + \vec{y}_{\mathrm{sp}} \\ &= c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \ln(x) e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (\ln(x) + c_2) e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel 3

Gegeben: $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} -2\sin(x) \\ \sin(x) - 3\cos(x) \end{pmatrix}$

1. Schritt: Lösung des homogenen Systems

- $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5, \quad \text{EW } \lambda_1 = 2+i,\ \lambda_2 = 2-i$
- EV zu λ_1: $\left(\begin{array}{cc|c} -1-i & 2 & 0 \\ -1 & 1-i & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$
  $\Longrightarrow \quad \vec{v}^{[1]} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$
- EV zu $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$: $\quad \vec{v}^{[2]} = \overline{\vec{v}^{[1]}} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$

Beispiel 3

Gegeben: $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} -2\sin(x) \\ \sin(x) - 3\cos(x) \end{pmatrix}$

- Fund'system $\vec{y}_{\mathrm{h}}^{[1]} = e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_{\mathrm{h}}^{[2]} = e^{(2-i)x} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$
- Reelles Fund'system $\mathrm{Re}(\vec{y}_{\mathrm{h}}^{[1]}) = e^{2x} \begin{pmatrix} \sin(x) + \cos(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix},$

  $\mathrm{Im}(\vec{y}_{\mathrm{h}}^{[1]}) = e^{2x} \begin{pmatrix} \sin(x) - \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$
- $(a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i$
- $\mathrm{Re}((a+bi)e^{(\alpha+\beta i)x}) = e^{\alpha x}\big(a\cos(\beta x) - b\sin(\beta x)\big)$
- $\mathrm{Im}((a+bi)e^{(\alpha+\beta i)x}) = e^{\alpha x}\big(a\sin(\beta x) + b\cos(\beta x)\big)$

Beispiel 3

Gegeben: $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} -2\sin(x) \\ \sin(x) - 3\cos(x) \end{pmatrix}$

2. Schritt: Ansatz für spezielle Lösung

Version A:

- $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin(x) = -\frac{i}{2}(e^{ix} - e^{-ix})$
- Umschreiben $\vec{b}(x) = \underbrace{e^{ix} \begin{pmatrix} P_1^{[1]}(x) \\ P_2^{[1]}(x) \end{pmatrix}}_{=:\vec{b}^{[1]}} + \underbrace{e^{-ix} \begin{pmatrix} P_1^{[2]}(x) \\ P_2^{[2]}(x) \end{pmatrix}}_{=:\vec{b}^{[2]}}$
- Ansätze für $\vec{b}^{[1]}, \vec{b}^{[2]} \quad \longrightarrow \quad \vec{y}_{\mathrm{sp}}$

Beispiel 3

Gegeben: $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} -2\sin(x) \\ \sin(x) - 3\cos(x) \end{pmatrix}$

2. Schritt: Ansatz für spezielle Lösung

Version B:

- Ansatz $\vec{y}_{\mathrm{sp}} = \begin{pmatrix} A\sin(x) + B\cos(x) \\ C\sin(x) + D\cos(x) \end{pmatrix}$
- Linke Seite:

$$\vec{y}_{\mathrm{sp}}\,' = \begin{pmatrix} -B\sin(x) + A\cos(x) \\ -D\sin(x) + C\cos(x) \end{pmatrix}$$

Beispiel 3

Gegeben: $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} -2\sin(x) \\ \sin(x) - 3\cos(x) \end{pmatrix}$

- Rechte Seite:

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\sin(x) + B\cos(x) \\ C\sin(x) + D\cos(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\sin(x) \\ \sin(x) - 3\cos(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (A + 2C - 2)\sin(x) + (B + 2D)\cos(x) \\ (-A + 3C + 1)\sin(x) + (-B + 3D - 3)\cos(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel 3

- Gleichsetzen

$$\mathrm{LHS} = \begin{pmatrix} -B\sin(x) + A\cos(x) \\ -D\sin(x) + C\cos(x) \end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \mathrm{RHS} = \begin{pmatrix} (A + 2C - 2)\sin(x) + (B + 2D)\cos(x) \\ (-A + 3C + 1)\sin(x) + (-B + 3D - 3)\cos(x) \end{pmatrix}$$

- Koeffizientenvergleich

$$-B = A + 2C - 2 \qquad A = B + 2D$$

$$-D = -A + 3C + 1 \qquad C = -B + 3D - 3$$

- Lösung: $A = 2$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1$.

Beispiel 3

Gegeben: $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} -2\sin(x) \\ \sin(x) - 3\cos(x) \end{pmatrix}$

- $\vec{y}_{\mathrm{sp}} = \begin{pmatrix} 2\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$
- Allgemeine Lösung

$$\vec{y} = c_1 e^{2x} \begin{pmatrix} \sin(x) + \cos(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{pmatrix} \sin(x) - \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

J: Partielle Differentialgleichungen

Gewöhnliche vs. partielle Differentialgleichungen

Gewöhnliche Differentialgleichung

Gesucht: Funktion $y(x)$ mit

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0$$

Partielle Differentialgleichung

Gesucht: Funktion $u(\vec{x})$ mit

$$F\left(\vec{x}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots\right) = 0$$

(endlich viele Terme)

Lineare partielle Differentialgleichungen

- Lineare partielle DGL:

$$a_0 u + a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + b_{1,1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1} + b_{1,2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots = f(\vec{x})$$

- Koeff' $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_{1,1}, b_{1,2}, \ldots$ dürfen von $\vec{x}$ abhängen
- homogen: $f(\vec{x}) = 0$
- inhomogen: $f(\vec{x}) \neq 0$
- Ordnung: höchste vorkommende Ableitung

  z.B. $\frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial x_3} \longrightarrow$ Ordnung 4

Gegeben: Lineare part. DGL 2. Ordnung, zweidimensional

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + p(x,y)u_x + q(x,y)u_y + s(x,y)u = f(x,y)$$

- Diskriminante $d(x,y) = b^2 - ac$
- DGL hyperbolisch in (x_0, y_0) $\quad :\Longleftrightarrow \quad d(x_0, y_0) > 0$
- DGL parabolisch in (x_0, y_0) $\quad :\Longleftrightarrow \quad d(x_0, y_0) = 0$
- DGL elliptisch in (x_0, y_0) $\quad :\Longleftrightarrow \quad d(x_0, y_0) < 0$

Beispiele

- 1-dim. Wellengl.: $u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$
  (überall hyperbolisch)
- 1-dim. Wärmeleitungsgl.: $u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$
  (überall parabolisch)
- 2-dim. Potentialgl.: $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$
  (überall elliptisch)
- 2-dim. Poissongl.: $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y)$
- 2-dim. Wellengl.: $u_{tt}(x,y,t) = c^2\big(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)\big)$
- 3-dim. Potentialgl.: $u_{xx}(x,y,z) + u_{yy}(x,y,z) + u_{zz}(x,y,z) = 0$