J: Partielle Differentialgleichungen

Erinnerung: Lineare partielle Differentialgleichungen

Gegeben: Lineare part. DGL 2. Ordnung, zweidimensional

$$
\begin{aligned}
a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}& \\
+ p(x,y)u_x + q(x,y)u_y + s(x,y)u &= f(x,y)
\end{aligned}
$$

- Diskriminante $d(x,y) = b^2 - ac$
- DGL hyperbolisch in (x_0, y_0) $\quad :\Longleftrightarrow \quad d(x_0, y_0) > 0$
- DGL parabolisch in (x_0, y_0) $\quad :\Longleftrightarrow \quad d(x_0, y_0) = 0$
- DGL elliptisch in (x_0, y_0) $\quad :\Longleftrightarrow \quad d(x_0, y_0) < 0$

Beispiele

- 1-dim. Wellengl.: $u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$
  (überall hyperbolisch)
- 1-dim. Wärmeleitungsgl.: $u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$
  (überall parabolisch)
- 2-dim. Potentialgl.: $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$
  (überall elliptisch)
- 2-dim. Poissongl.: $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y)$
- 2-dim. Wellengl.: $u_{tt}(x,y,t) = c^2\big(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)\big)$
- 3-dim. Potentialgl.: $u_{xx}(x,y,z) + u_{yy}(x,y,z) + u_{zz}(x,y,z) = 0$

Bemerkung

Part. DGL haben i.A. sehr viele verschiedene Lösungen!

Gegeben: $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$

Lösungen:

- $u(x,y) = ax + by + c$
- $u(x,y) = x^2 - y^2$
- $u(x,y) = x^3y - xy^3$
- $u(x,y) = \sin(x)e^{-y}$
- $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$
- $\cdots$

Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen

Eindeutige Lösbarkeit meist durch

- Randbedingungen:
  Funktion u auf $B \subset \mathbb{R}^n$ definiert, Bedingungen an u auf ∂B
- Anfangsbedingungen:
  Variablen $t, x, y, \ldots$, Bedingungen an u für $t = 0$

In diesem Kurs keine allgemeine Theorie der Lösbarkeit.

Superpositionsprinzip

Gegeben:

- Lineare partielle homogene DGL
- Lösungen $u^{[1]}, \dots, u^{[k]}$
- Konstanten $c_1, \dots, c_k$

Dann auch $c_1 u^{[1]} + \cdots + c_k u^{[k]}$ Lösung

Separationsmethode

Produktansatz $u(x, y) = F(x) \cdot G(y)$

- Drücke part. Abl. in F, G aus
- Trenne nach F und G
- Funktioniert gut, wenn DGL homogen & ohne gemischte Abl.

Beispiel: $u_x(x, y) = u_y(x, y)$

- $u = F(x)G(y) \quad \Longrightarrow \quad u_x = F'G, \quad u_y = FG' \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{F'}{F} = \dfrac{G'}{G}$
- $\dfrac{F'}{F}$ nur von x abh., $\dfrac{G'}{G}$ nur von y $\quad \Longrightarrow \quad \dfrac{F'}{F} = \dfrac{G'}{G}$ konstant
- $\dfrac{F'}{F} = \dfrac{G'}{G} = k \in \mathbb{R}$ Separationskonstante
- Lösung $F(x) = c_1 e^{kx}, \quad G(y) = c_2 e^{ky}$

Die eindimensionale Wellengleichung

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \qquad\qquad x \in [0,L],\ t \geq 0$$

- Schwingung eingespannter Saite, Länge L
- Konstante $c > 0$ aus Materialeigenschaften
- Randbedingung $u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \forall t \geq 0$
- Anfangsauslenkung $f(x)$, -geschwindigkeit $g(x)$
- Anfangsbedingungen $u(x,0) = f(x)$ und $u_t(x,0) = g(x) \quad \forall x \in [0,L]$

Die eindimensionale Wellengleichung

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \qquad\qquad x \in [0,L],\ t \geq 0$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x)$$

- Produktansatz $u(x,t) = F(x)G(t) \quad \Longrightarrow \quad u_{tt} = FG'', \quad u_{xx} = F''G$
- $FG'' = c^2 F''G \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{G''}{c^2 G} = \dfrac{F''}{F} = k \in \mathbb{R} \qquad$ (für $F(x), G(t) \neq 0$)
- $F'' - kF = 0, \quad F(0) = F(L) = 0$
- $G'' - c^2 kG = 0$

Die eindimensionale Wellengleichung

$$F'' - kF = 0, \qquad \text{RB: } F(0) = F(L) = 0$$

- Fall $k > 0$: $F(x) = Ae^{\sqrt{k}x} + Be^{-\sqrt{k}x} \quad \overset{\text{RB}}{\Longrightarrow} \quad A = B = 0$
- Fall $k = 0$: $F(x) = Ax + B \quad \overset{\text{RB}}{\Longrightarrow} \quad A = B = 0$
- Fall $k < 0$: $F(x) = A\cos(\sqrt{|k|}x) + B\sin(\sqrt{|k|}x)$

  $\overset{F(0)=0}{\Longrightarrow} \quad A = 0 \quad \overset{F(L)=0}{\Longrightarrow} \quad B\sin(\sqrt{|k|}L) = 0$
- Fundamentallösungen $F_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad (k = -\frac{n^2\pi^2}{L^2})$

Die eindimensionale Wellengleichung

- $F_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ $\qquad (k = -\frac{n^2\pi^2}{L^2})$

$$G'' - c^2 kG = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad G'' + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 G = 0$$

- Allg. Lösung $G_n(t) = b_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + b_n^* \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)$
- Eigenwerte $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$
- Eigenfunktionen $u_n(x,t) = \Big(b_n \cos(\lambda_n t) + b_n^* \sin(\lambda_n t)\Big) \sin\left(\frac{\lambda_n}{c}x\right)$
- Anfangsbedingungen?

Die eindimensionale Wellengleichung

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \qquad\qquad x \in [0,L],\ t \geq 0$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x)$$

- Lösung: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(b_n \cos(\lambda_n t) + b_n^* \sin(\lambda_n t) \Big) \sin\left(\frac{\lambda_n}{c} x \right)$
  (falls glm. konvergent)
- $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\lambda_n}{c} x \right) \stackrel{!}{=} f(x)$
- $u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n^* \sin\left(\frac{\lambda_n}{c} x \right) \stackrel{!}{=} g(x)$ $\qquad\qquad \frac{\lambda_n}{c} = \frac{n\pi}{L}$

Die eindimensionale Wellengleichung

- f^*, g^*: $2L$-period. ungerade Fortsetzungen von f, g
- Fourierreihen $f^*(x) = u(x,0)$, $\quad g^*(x) = u_t(x,0) \quad$ mit

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\, dx,$$

$$b_n^* = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\, dx$$

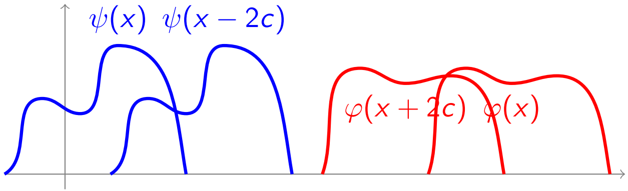
- $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(b_n \cos(\lambda_n t) + b_n^* \sin(\lambda_n t) \Big) \sin\left(\frac{\lambda_n}{c} x\right)$
- Glm. konv., (z.B.) falls f, g stetig diff'bar

Die eindimensionale Wellengleichung

Alternative Darstellung:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\Big(f^*(x+ct)+f^*(x-ct)\Big)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g^*(s)\,ds \\ &= \varphi(x+ct)+\psi(x-ct) \end{aligned}$$

mit geeignetem φ, ψ



Varianten

- Inhomogene DGL: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = \phi(x, t)$
  $\phi(x, t)$ von außen wirkende Kraft
- Inhomogene RB: $u(0, t) = r(t), \quad u(L, t) = s(t)$

Die zweidimensionale Wellengleichung

$$u_{tt}(x,y,t) = c^2\Big(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)\Big), \qquad (x,y) \in B \subset \mathbb{R}^2,\ t \geq 0$$

- Schwingung eingespannter Membran auf B
- Randbedingung $u(x,y,t) = 0 \quad \forall (x,y) \in \partial B,\ t \geq 0$
- Anfangsbedingungen $u(x,y,0) = f(x,y)$ und $u_t(x,y,0) = g(x,y)$

Lösung in 2 Schritten:

- Separieren von Ort und Zeit
- Separation der Ortskoordinaten

Die zweidimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \qquad (x,y) \in B,\ t \geq 0$$
$$u(x,y,t) = 0 \text{ auf } \partial B, \quad u(x,y,0) = f(x,y), \quad u_t(x,y,0) = g(x,y)$$

1. Schritt: Separieren von Ort und Zeit

- Produktansatz $u(x,y,t) = F(x,y)G(t)$
- $u_{tt} = FG'', \quad u_{xx} = F_{xx}G, \quad u_{yy} = F_{yy}G$
- $FG'' = c^2(F_{xx} + F_{yy})G \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{G''}{c^2 G} = \dfrac{F_{xx} + F_{yy}}{F} = -\nu^2 < 0$
- $F_{xx} + F_{yy} + \nu^2 F = 0, \quad F|_{\partial B} = 0$
- $G'' + c^2\nu^2 G = 0$

$$F_{xx} + F_{yy} + \nu^2 F = 0, \qquad F|_{\partial B} = 0$$

2. Schritt: Separation der Ortskoordinaten

- Koordinaten passend zu B

Beispiel 1: $B = [0, a] \times [0, b]$

- Produktansatz $F(x, y) = P(x)Q(y)$
- $P''Q + PQ'' + \nu^2 PQ = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{P''}{P} = -\dfrac{Q''}{Q} - \nu^2 = k \in \mathbb{R}$
- $P'' - kP = 0, \quad P(0) = P(a) = 0$
- $Q'' + (k + \nu^2)Q = 0, \quad Q(0) = Q(b) = 0$
- Analog zu 1-dim: $\quad k = -\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2, \quad k + \nu^2 = \left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2$

Die zweidimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \qquad (x,y) \in B,\ t \geq 0$$
$$u(x,y,t) = 0 \text{ auf } \partial B, \quad u(x,y,0) = f(x,y), \quad u_t(x,y,0) = g(x,y)$$

Beispiel 1: $B = [0,a] \times [0,b]$

- Lösungen ähnlich zu 1-dim. Fall
- Eigenwerte $\lambda_{m,n} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \qquad (m, n \in \mathbb{N})$
- Eigenfunktionen

$$u_{m,n} = \left(b_{m,n}\cos(\lambda_{m,n}t) + b^*_{m,n}\sin(\lambda_{m,n}t)\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Die zweidimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \qquad (x, y) \in B,\ t \geq 0$$

$$u(x, y, t) = 0 \text{ auf } \partial B, \quad u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = g(x, y)$$

Beispiel 1: $B = [0, a] \times [0, b]$

- Fourierkoeff.

$$b_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \, dxdy,$$

$$b^*_{m,n} = \frac{4}{ab\lambda_{m,n}} \int_0^b \int_0^a g(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \, dxdy$$

- Allg. Lösung $u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n}(x, y, t)$

$$F_{xx} + F_{yy} + \nu^2 F = 0, \qquad F|_{\partial B} = 0$$

Beispiel 2: $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$

- Polarkoordinaten $\tilde{F}(r, \varphi) = F(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$
- $F_{xx} + F_{yy} = \tilde{F}_{rr} + \frac{1}{r}\tilde{F}_r + \frac{1}{r^2}\tilde{F}_{\varphi\varphi}$
- DGL

$$\tilde{F}_{rr} + \frac{1}{r}\tilde{F}_r + \frac{1}{r^2}\tilde{F}_{\varphi\varphi} + \nu^2\tilde{F} = 0, \qquad \tilde{F}(R, \varphi) = 0$$

Die zweidimensionale Wellengleichung

Beispiel 2: $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$

$$\tilde{F}_{rr} + \frac{1}{r}\tilde{F}_r + \frac{1}{r^2}\tilde{F}_{\varphi\varphi} + \nu^2 \tilde{F} = 0, \qquad \tilde{F}(R, \varphi) = 0$$

- Produktansatz $\tilde{F}(r, \varphi) = P(r)Q(\varphi)$
- $\dfrac{Q''}{Q} = -r^2 \dfrac{P''}{P} - r\dfrac{P'}{P} - r^2\nu^2 = -n^2 < 0$
- $r^2 P'' + rP' + (r^2\nu^2 - n^2)P = 0, \quad P(R) = 0$
- $Q'' + n^2 Q = 0$
- Vorsicht bei $r = 0$ (mögl. Singularität der Polarkoord.)!
- DGL für P schwieriger.

Spezialfall: $u(r,t)$ (rotationssymm.)

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right), \qquad r \in [0,R],\ t \geq 0$$

$$u(R,t) = 0, \qquad u(r,0) = f(r), \qquad u_t(r,0) = g(r)$$

- Für $n \in \mathbb{N}_0$: Besselfunktion erster Art

$$J_n(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{n+2k}}{2^{n+2k} k!(k+n)!}$$

- Nullstellen $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$ von J_0

Die zweidimensionale Wellengleichung

Spezialfall: $u(r,t)$ (rotationssymm.)

$$u_{tt} = c^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right), \qquad r \in [0,R],\ t \geq 0$$

$$u(R,t) = 0, \qquad u(r,0) = f(r), \qquad u_t(r,0) = g(r)$$

- Besselkoeff.

$$a_m = \frac{2}{R^2(J_1(\alpha_m))^2}\int_0^R rf(r)J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)\,dr,$$

$$b_m = \frac{2}{cR\alpha_m(J_1(\alpha_m))^2}\int_0^R rg(r)J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)\,dr$$

- Allg. Lösung: Fourier-Bessel-Reihe

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\left(\frac{c\alpha_m}{R}t\right) + b_m\sin\left(\frac{c\alpha_m}{R}t\right)\right)J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)$$