# Erinnerung: Separationsmethode

Produktansatz $u(x, y) = F(x) \cdot G(y)$

- Drücke part. Abl. in $F, G$ aus
- Trenne nach $F$ und $G$
- Funktioniert gut, wenn DGL homogen & ohne gemischte Abl.

Beispiel:

- Eindimensionale Wellengleichung
- Zweidimensionale Wellengleichung
  (insb. Spezialfall rotationssymmetrisch)

# Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= c^2 u_{xx}(x,t), \qquad & x \in [0,L],\ t \geq 0 \\
\text{RB: } u(0,t) &= u(L,t) = 0, \qquad & \text{AB: } u(x,0) = f(x)
\end{aligned}
$$

- Stab der Länge $L$
- $t = 0$: Temperaturverteilung $f(x) \not\equiv 0$
- Enden auf Temperatur 0 gehalten

# Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \qquad x \in [0,L],\ t \geq 0$$
$$\text{RB: } u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad \text{AB: } u(x,0) = f(x) \not\equiv 0$$

- Produktansatz $u(x,t) = F(x)G(t)$
- $FG' = c^2 F'' G \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{F''}{F} = \dfrac{G'}{c^2 G} = k \in \mathbb{R}$
- $k \geq 0 \quad \overset{\text{RB}}{\Longrightarrow} \quad F \equiv 0 \quad \overset{\text{AB}}{\Longrightarrow}$ Widerspruch
- $k = -p^2 < 0$
- $F'' + p^2 F = 0, \quad F(0) = F(L) = 0$
- $G' + c^2 p^2 G = 0$

# Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \qquad x \in [0,L],\ t \geq 0$$
$$\text{RB: } u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad \text{AB: } u(x,0) = f(x) \not\equiv 0$$

- $F'' + p^2 F = 0, \quad F(0) = F(L) = 0$
- Analog zu Wellengl.: $\quad p = \dfrac{n\pi}{L}$

  Fundamentallösungen $F_n(x) = \sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$
- $G' + c^2 p^2 G = 0$
- $G_n(t) = b_n e^{-\lambda_n^2 t} \quad$ mit Eigenwert $\lambda_n = \dfrac{cn\pi}{L}$
- Eigenfunktionen $u_n = b_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$

# Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \qquad x \in [0,L],\ t \geq 0$$
$$\text{RB: } u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad \text{AB: } u(x,0) = f(x) \not\equiv 0$$

- Allgemeine Lösung: $\quad u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$
- Koeffizienten $\quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, dx \quad$ (Fourier)
- Verhalten für $t \to \infty$: $\quad u(x,t) \xrightarrow{\text{glm}} 0$

Variante:

$$u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \qquad x \in [0,L],\ t \geq 0$$

$$\text{RB: } u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \qquad \text{AB: } u(x,0) = f(x) \not\equiv 0$$

- Interpretation: Enden des Stabs isoliert
- $F'' + p^2 F = 0, \quad F'(0) = F'(L) = 0$
- $G' + c^2 p^2 G = 0$
- $F_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, $n \geq 0$
- $G_n(t) = a_n e^{-\lambda_n^2 t} \quad \text{mit } \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$, $n \geq 1$
- $G_0(t) = \frac{1}{2} a_0$

# Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

Variante:

$$u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \qquad x \in [0,L],\ t \geq 0$$

$$\text{RB: } u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \qquad \text{AB: } u(x,0) = f(x) \not\equiv 0$$

- Allgemeine Lösung: $u = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$
- Koeffizienten $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx$
- Verhalten für $t \to \infty$: $u(x,t) \xrightarrow{\text{glm}} \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$

# Potentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0, \qquad \vec{x} \in B \subset \mathbb{R}^n$$

Typische Randbedingungen:

- Dirichlet-Problem $\quad u\big|_{\partial B} = f$
- Neumann-Problem $\quad \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial B} = g$
- Gemischt: Dirichlet-Bed. auf $S \subset \partial B$, Neumann-Bed. auf $\partial B \setminus S$
- Hier: Dirichlet

# Dirichlet-Probleme in der Ebene

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ für } (x, y) \in B, \qquad u\big|_{\partial B} = f, \qquad B \subset \mathbb{R}^2$$

Beispiel 1: $B = [0, a] \times [0, b]$, $u(\text{Eckpunkte}) = 0$,
$u(x, 0) = f_S(x)$, $u(x, b) = f_N(x)$, $u(0, y) = f_W(y)$, $u(a, y) = f_O(y)$

- Betrachte $f_N, f_W, f_S, f_O$ separat (andere durch 0 ersetzt)
- Lösungen $u_N, u_W, u_S, u_O$
- $u = u_N + u_W + u_S + u_O$ Lösung vom Ausgangsproblem
- Hier: $f_W, f_S, f_O \equiv 0$

# Dirichlet-Probleme in der Ebene

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ für } (x,y) \in B, \qquad u\big|_{\partial B} = f, \qquad B \subset \mathbb{R}^2$$

Beispiel 1: $B = [0,a] \times [0,b], \quad u(x,b) = f(x), \quad u(x,y)\big|_{\partial B} = 0$ sonst

- Produktansatz $u(x,y) = F(x)G(y) \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{F''}{F} = -\dfrac{G''}{G} = -k^2$
- $F'' + k^2 F = 0, \quad F(0) = F(a) = 0$
- Lösungen $F_n(x) = \sin\left(\dfrac{n\pi}{a} x\right) \quad$ mit $k = \frac{n\pi}{a}$
- $G'' - \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2 G = 0, \quad G(0) = 0, \quad G(b)F(x) = f(x)$
- Lösung $G_n(y) = A_n e^{\frac{n\pi}{a} y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a} y} \quad \overset{G(0)=0}{\Longrightarrow} \quad A_n = -B_n$

  $\Longrightarrow \quad G_n(y) = 2A_n \sinh\left(\dfrac{n\pi}{a} y\right)$

# Dirichlet-Probleme in der Ebene

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \text{ für } (x, y) \in B, \qquad u\big|_{\partial B} = f, \qquad B \subset \mathbb{R}^2$$

Beispiel 1: $B = [0, a] \times [0, b], \quad u(x, b) = f(x), \quad u(x, y)\big|_{\partial B} = 0$ sonst

- $u(x, y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$
- $u(x, b) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) = f(x)$
- Fourier: $c_n = \dfrac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \displaystyle\int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)\, dx$

# Dirichlet-Probleme in der Ebene

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ für } (x, y) \in B, \qquad u\big|_{\partial B} = f, \qquad B \subset \mathbb{R}^2$$

Beispiel 2: $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}, \quad u(R, \varphi) = f(\varphi)$

- Polarkoordinaten $u_{rr}(r, \varphi) + \frac{1}{r} u_r(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = 0$
- RB: $u(R, \varphi) = f(\varphi), \quad f$ $2\pi$-periodisch
- Produktansatz $u(r, \varphi) = F(r)G(\varphi)$
- $r^2 F'' + rF' + kF = 0, \quad k \in \mathbb{R}$
- $G'' - kG = 0, \quad G$ $2\pi$-periodisch
- Lösung durch komplexe Analysis

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \;\text{ für } (x, y) \in B, \qquad u\Big|_{\partial B} = f, \qquad B \subset \mathbb{R}^2$$

Beispiel 2: $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}, \quad u(R, \varphi) = f(\varphi)$

- Lösung: $u(r, \varphi) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \alpha) + r^2} f(\alpha)\, d\alpha$
- Fourier: $u(r, \varphi) = \dfrac{1}{2} a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)\Big) \left(\frac{r}{R}\right)^n$
- Koeff. $\quad a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos(n\alpha)\, d\alpha,$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin(n\alpha)\, d\alpha$$

# Dirichlet-Probleme im Raum

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \text{ für } (x, y, z) \in B, \qquad u\big|_{\partial B} = f, \qquad B \subset \mathbb{R}^3$$

Beispiel 1: $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}, \quad u(R, \varphi, z) = f(\varphi, z)$

- Zylinderkoordinaten $\longrightarrow \quad u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + u_{zz} = 0$
- RB: $u(R, \varphi, z) = f(\varphi, z), \quad f$ $2\pi$-periodisch in $\varphi$
- 1. Produktansatz $u(r, \varphi, z) = A(r, \varphi) B(z)$
- $r^2 A_{rr} + r A_r + A_{\varphi\varphi} + k^2 r^2 A = 0$
- $B'' - k^2 B = 0$
- 2. Produktansatz $A(r, \varphi) = G(r) H(\varphi)$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \text{ für } (x,y,z) \in B, \qquad u\big|_{\partial B} = f, \qquad B \subset \mathbb{R}^3$$

Beispiel 1: $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}, \quad u(R,\varphi,z) = f(\varphi,z)$

- $r^2 G'' + rG' + (k^2 r^2 - n^2)G = 0$ (siehe 2-dim Wellengl.)
- $H'' + n^2 H = 0, \quad H$ $2\pi$-periodisch
- Lösung: Fourier-Bessel-Reihe (siehe 2-dim Wellengl.)
- Summe von Eigenfunktionen

$$J_n(kr)\Big(a_{k,n}\sin(n\pi\varphi) + b_{k,n}\cos(n\pi\varphi)\Big)\left(c_{k,n}e^{kz} + d_{k,n}e^{-kz}\right)$$

- Koeffizienten aus RB

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \text{ für } (x, y, z) \in B, \qquad u\big|_{\partial B} = f, \qquad B \subset \mathbb{R}^3$$

Beispiel 2: $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$,
Spezialfall $u(r, \theta)$, $u(R, \theta) = f(\theta)$

- Umformen $\longrightarrow$ $\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \dfrac{1}{\sin(\theta)} \dfrac{\partial}{\partial \theta}(\sin(\theta) u_\theta) = 0$
- RB: $u(R, \theta) = f(\theta)$
- Produktansatz $u(r, \theta) = G(r)H(\theta)$
- $r^2 G'' + 2rG' - n(n+1)G = 0$
- $(\sin(\theta)H')' + n(n+1)\sin(\theta)H = 0$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \text{ für } (x, y, z) \in B, \qquad u\big|_{\partial B} = f, \qquad B \subset \mathbb{R}^3$$

Beispiel 2: $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$,
Spezialfall $u(r, \theta)$, $u(R, \theta) = f(\theta)$

- Lösung: $u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos(\theta))$
- Legendre-Polynome $P_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-2k)!k!2^k} x^{n-2k}$
- Koeffizienten $A_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos(\theta)) \sin(\theta)\, d\theta$

# Z: Prüfung (Vorschau)

# Aufbau Prüfung (ohne Gewähr)

- 4 Rechenbeispiele (ca. 30 Punkte gesamt)
  - 1-dim Integral
  - Funktion in mehreren Variablen
  - Mehrfachintegral
  - Gewöhnliche Differentialgleichung

  (Punkteverteilung variabel)
- 1 Theoriebeispiel (ca. 10 Punkte)
  - Definitionen
  - Zusammenhänge
  - Ansätze

Morgige Vorlesung ☞ Beispielprüfung