Mathematik B (ET) Sommersemester 2020

1. Übungsblatt (5.3.2020)

Beispiel 1.1. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{2}\right).$$

(a) Finden Sie die allgemeine Formel für die n-te Ableitung von f und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion. **(3 Pkt.)**

(b) Geben Sie die Taylorreihe und das Taylorpolynom zweiten Grades von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = -1$ an. Setzen Sie $x = -1{,}001$ in das Taylorpolynom ein. Wie nah liegt der erhaltene Wert laut Taylorformel mindestens am Funktionswert $f(-1{,}001)$? **(2 Pkt.)**

Beispiel 1.2. Untersuchen Sie die Funktionenfolge $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$, welche durch $f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{1 + n^2 x^2}$ definiert ist, auf punktweise und auf gleichmäßige Konvergenz. **(3 Pkt.)**

Beispiel 1.3. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen **(3 Pkt.)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)\right)^n (x-2)^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n.$$

Beispiel 1.4. Bestimmen Sie die Konvergenzbereiche (d.h. die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die jeweilige Reihe konvergiert) der Potenzreihen

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n (x-1)^n}{4^n + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-1)^n}{4^n (n+1)} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-1)^n}{4^n (n^2+1)};$ **(3 Pkt.)**

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^3}} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sqrt{(4n+1)3^n}\,(x+3)^n.$ **(2 Pkt.)**

Beispiel 1.5. Verwenden Sie die geometrische Potenzreihe **(2 Pkt.)**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

und die Regeln für Differenzieren von Potenzreihen, um die Werte

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \qquad \text{und} \qquad h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

für alle $x \in (-1, 1)$ zu berechnen.