Mathematik B (ET) Sommersemester 2020

10. Übungsblatt (28.5.2020)

Hinweis: Überlegen Sie sich bei Mehrfachintegralen gut, welche Integrationsreihenfolge Sie verwenden wollen.

Beispiel 10.1. Berechnen Sie das Integral der Funktion (3 Pkt.)

$$f(x,y) = \frac{x^3}{(1+x^2y)^2}$$

über das Rechteck $Q = [0, \sqrt{2}] \times [0,1]$

- indem Sie zuerst $F(x) := \int_0^1 f(x,y)\,dy$ und danach $\int_0^{\sqrt{2}} F(x)\,dx$ berechnen;
- indem Sie zuerst $G(y) := \int_0^{\sqrt{2}} f(x,y)\,dx$ mit Hilfe der Substitution $u = x^2y$ berechnen und danach $\int_0^1 G(y)\,dy$ durch partielle Integration ermitteln.

Beispiel 10.2. Integrieren Sie die Funktion (2 Pkt.)

$$f(x,y) = y^2\cos(x)e^{-y^3} - x^2\sinh(y)$$

über das Rechteck $Q = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$.

Beispiel 10.3. Berechnen Sie das Integral (2 Pkt.)

$$\iint_B e^{-x^2}\,dxdy,$$

wobei B das Dreieck mit den Eckpunkten $(1,0)$, $(1,2)$ und $(0,2)$ bezeichnet.

Beispiel 10.4. Integrieren Sie die Funktion $f(x,y) = 8xy$ über den Bereich B, der durch $y \geq x^2$, $y \leq 8 - x^2$ und $y \leq x + 6$ definiert ist. (3 Pkt.)

Beispiel 10.5. Bestimmen Sie mit Hilfe der Variablentransformation (3 Pkt.)

$$u = xy, \qquad v = \frac{y}{x}$$

den Wert des Integrals $\iint_B \frac{4x}{y} e^{xy} dxdy$, wobei B der von den Kurven $y = \frac{1}{2x}$, $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{x}{2}$ und $y = 2x$ berandete Bereich im ersten Quadranten (also $x, y > 0$) ist.

Beispiel 10.6. Verwenden Sie Polarkoordinaten, um das Integral (2 Pkt.)

$$\iint_B \frac{4xy}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

zu berechnen, wobei

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0\}.$$

Beispiel 10.7. Ermitteln Sie die Jacobideterminante der Variablentransformation (3 Pkt.)

$$x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi), \qquad z = z$$

in Zylinderkoordinaten und verwenden Sie diese, um das Integral der Funktion $f(x,y,z) = \frac{4z}{1+x^2+y^2}$ über den Bereich

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 3 \wedge x^2 + y^2 \leq z\}$$

zu berechnen.