Mathematik B (ET) Sommersemester 2020

11. Übungsblatt (4.6.2020)

Beispiel 11.1. Gegeben ist ein Kegel mit Höhe H und kreisförmiger Grundfläche von Radius R. Dabei befindet sich die Spitze des Kegels senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche. Auf die Grundfläche wird eine Halbkugel mit Radius R geklebt. Welchen Wert muss H (in Abhängigkeit von R) haben, damit der Schwerpunkt des entstandenen Körpers genau im Mittelpunkt der Klebefläche liegt? Die Dichte ist hierbei konstant $\rho = 1$. **(3 Pkt.)**
Bemerkung: Sie dürfen bekannte Formeln für die Masse des Kegels und der Halbkugel – nicht aber Formeln für deren Schwerpunkte – ohne Beweis verwenden.

Beispiel 11.2. Berechnen Sie das Kurvenintegral **(2 Pkt.)**

$$\oint_C \left\langle \begin{pmatrix} ye^{x^2-y^2} \\ xe^{x^2-y^2} \end{pmatrix}, \vec{n} \right\rangle ds,$$

wobei C den Rand des Quadrats mit Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ und $(0,1)$ (durchlaufen in dieser Reihenfolge) bezeichnet

- direkt anhand der Definition von Kurvenintegralen,
- mit Hilfe des Satzes von Gauß.

Beispiel 11.3. Gegeben ist die Funktion **(2 Pkt.)**

$$f(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4.$$

Mit C bezeichnen wir den Kreis vom Radius 1 um den Nullpunkt, durchlaufen in der Standardparametrisierung $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}$ von f in einem allgemeinen Punkt auf C, wobei $\vec{n}$ der nach außen gerichtete Normalvektor von C ist. Zeigen Sie anschließend mit Hilfe der Greenschen Formeln, dass

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\, ds = 0.$$

Beispiel 11.4. Ermitteln Sie die Lösung des Anfangswertproblems **(2 Pkt.)**

$$y' \tan(y) = x \cos(y)^2, \qquad y(0) = \frac{2\pi}{3}.$$

Beispiel 11.5. Lösen Sie das Anfangswertproblem **(3 Pkt.)**

$$y' = x^3y^2 - 3\frac{y}{x}, \qquad y(1) = -\frac{1}{2}$$

für $x > 0$ mit Hilfe der Substitution $z(x) = x^3 y(x)$.

Beispiel 11.6. Lösen Sie das Anfangswertproblem **(3 Pkt.)**

$$y = xy' - \sqrt{x^2 - y^2}, \qquad y(1) = 1$$

für $x > 0$ mit Hilfe der Substitution $z(x) = \frac{y(x)}{x}$.

Beispiel 11.7. Bestimmen Sie die allgemeine Lösungen der Differentialgleichungen **(3 Pkt.)**

$$\cos(x)y' - \sin(x)y = 4x \qquad \text{und} \qquad \cos(x)y' - \sin(x)y = \sin(x),$$

jeweils mit $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.