

Mathematik B (ET) Sommersemester 2020

4. Übungsblatt (26.3.2020)

Beispiel 4.1. Bestimmen Sie die folgenden Integrale durch quadratische Ergänzung des Polynoms unter der Wurzel.

(a) $\int \frac{22}{\sqrt{4x^2 - 12x + 13}} dx$ (2 Pkt.)

(b) $\int \frac{13}{\sqrt{9 - 8x - x^2}} dx$ (2 Pkt.)

Bemerkung: Für quadratische Ergänzung schreiben Sie das Polynom zunächst in die Form $(ax + b)^2 + c$ oder $-(ax + b)^2 + c$ um (mit Konstanten a, b, c) und substituieren dann $y = \frac{ax+b}{\sqrt{|c|}}$.

Beispiel 4.2. Berechnen Sie das Integral (3 Pkt.)

$$\int \frac{5x + 5}{x^3 + x^2 - 2} dx$$

mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung.

Beispiel 4.3. Berechnen Sie die Integrale (3 Pkt.)

$$\int \frac{1}{1 + \cos(x)} dx \quad \text{und} \quad \int \frac{1}{2 \sin(x) + 2 \cos(x) + 3} dx$$

mit Hilfe der Substitution $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Beispiel 4.4. Die Kurve (3 Pkt.)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 12t - t^3 \\ 6t^2 \end{pmatrix}$$

besitzt genau zwei Zeitpunkte $t_1 \neq t_2$ mit $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2)$. Ermitteln Sie die Werte t_1, t_2 sowie die Bogenlänge der Kurve zwischen diesen Zeitpunkten.

Beispiel 4.5. Berechnen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten die Bogenlänge der logarithmischen Spirale (2 Pkt.)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \end{pmatrix}$$

im Intervall $[0, T]$ für allgemeines $T > 0$.

Beispiel 4.6. Bestimmen Sie die Bogenlänge $s(t)$ der Kurve (3 Pkt.)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t \sin(t) \\ -\frac{4\sqrt{2}}{3} t^{3/2} \\ 2t \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Stellen Sie danach t in Abhängigkeit von s dar und ermitteln Sie so die natürliche Parametrisierung der Kurve.