

Mathematik B (ET) Sommersemester 2020

5. Übungsblatt (2.4.2020)

Beispiel 5.1. Berechnen Sie die Koeffizienten α_0 und α_1 gegeben durch

(2 Pkt.)

$$\alpha_i := \int_0^3 \left(\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^3 \frac{s-k}{i-k} \right) ds.$$

Setzen Sie die erhaltene Werte (sowie $\alpha_2 = \alpha_1$ und $\alpha_3 = \alpha_0$, was aus Symmetriegründen gilt) anschließend in den Ausdruck

$$\frac{b-a}{3} \sum_{i=0}^3 \alpha_i f(x_i)$$

ein und vergleichen Sie ihn mit der Näherung

$$\frac{b-a}{8} \left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \right)$$

aus der $\frac{3}{8}$ -Regel. (Hierbei ist jeweils $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{3}$.)

Beispiel 5.2. Berechnen Sie die Näherungen des Integrals

(2 Pkt.)

$$\int_0^\pi \sin(x) dx.$$

durch

- Trapezregel, Simpsonregel und $\frac{3}{8}$ -Regel;
- Trapezregel, Simpsonregel und $\frac{3}{8}$ -Regel angewendet auf die Intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ und $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ (für beide Intervalle die gleiche Regel verwenden);
- Zerlegung von $[0, \pi]$ in sechs gleichlange Intervalle, dort jeweils Trapezregel

und vergleichen Sie diese Näherungen mit dem exakten Wert.

Beispiel 5.3. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Fourierreihe. An welchen Stellen x konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen die Funktion? Ist die Konvergenz sogar gleichmäßig?

(a) Die 2π -periodische Fortsetzung der Funktion

(3 Pkt.)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi < x \leq 0, \\ x & \text{für } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

(b) Die 2π -periodische Fortsetzung der Funktion

(3 Pkt.)

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{für } -\pi < x \leq 0, \\ 0 & \text{für } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Beispiel 5.4. Ermitteln Sie die Fourierreihe der Funktion $f(x) = |\sin(x)|$. An welchen Stellen x konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen $f(x)$? Ist die Konvergenz sogar gleichmäßig?

(3 Pkt.)

Hinweis. Die Formel

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} \left(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \right)$$

kann die Berechnung der nötigen Integrale deutlich vereinfachen. (Achtung: Im Skript steht eine falsche Formel für $\sin(\alpha) \cos(\beta)$!)

Beispiel 5.5. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie, falls sie konvergieren, ihren Wert.

(a) $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ und $\int_{-\infty}^{\frac{2}{3}} \cos(3x - 2)e^{x+4} dx$

(3 Pkt.)

(b) $\int_2^{\infty} \frac{5x + 5}{x^3 + x^2 - 2} dx$ und $\int_2^{\infty} \frac{x^2 + 7x + 7}{x^3 + x^2 - 2} dx$

(3 Pkt.)

Hinweis. Für manche der Integranden haben wir auf früheren Übungsblättern bereits Stammfunktionen berechnet.