Mathematik B (ET) Sommersemester 2020

6. Übungsblatt (23.4.2020)

Beispiel 6.1. Überprüfen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Vergleichskriteriums auf Konvergenz. **(3 Pkt.)**

$$\int_0^\infty \frac{1}{\cosh(x^2)}\,dx, \qquad \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^3}\,dx, \qquad \int_2^\infty \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}\,dx.$$

Beispiel 6.2. Untersuchen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Integralkriteriums die Reihe **(3 Pkt.)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\frac{1}{2}}{e^n}$$

auf Konvergenz. Hierfür muss auch überprüft werden, dass der Satz angewendet werden darf!

Welche Bedingung im Cauchyschen Integralkriterium ist für die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+\frac{1}{2}}{e^n}$$

nicht erfüllt? Wie kann man dennoch die Konvergenz dieser Reihe mit Hilfe des Cauchyschen Integralkriteriums untersuchen?

Beispiel 6.3. Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Integralkriteriums, dass die Reihe **(2 Pkt.)**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$$

für $0 < \alpha \leq 1$ divergiert und für $1 < \alpha$ konvergiert.

Beispiel 6.4. Berechnen Sie die folgenden Integrale, falls sie konvergent sind. Zeigen Sie anderenfalls deren Divergenz.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ **(2 Pkt.)**

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$ **(2 Pkt.)**

Beispiel 6.5. Untersuchen Sie die Integrale **(2 Pkt.)**

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$$

auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Wert des Integrals an.

Beispiel 6.6. Man betrachte für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ die Integrale **(3 Pkt.)**

$$V = \pi \int_1^\infty (f(x))^2\,dx, \qquad F = 2\pi \int_1^\infty f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Berechnen Sie die Werte von V und F, falls sie konvergieren, anderenfalls zeigen Sie deren Divergenz.

Hinweis: Divergenz kann man auch zeigen, ohne eine explizite Stammfunktion zu berechnen.

Bemerkung: Lässt man den Graph von f für $x \geq 1$ um die x-Achse rotieren, dann ist V das eingeschlossene Volumen und F der Oberflächeninhalt.