Mathematik B (ET) Sommersemester 2021

1. Konversatorium 01.03.2021

Beispiel 1.1. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - x + \frac{1}{2}x^3}{\sin(x)\cos(2x) - x + \frac{13}{6}x^3},$$

indem Sie in Zähler und Nenner jeweils die ersten Summanden der Taylorreihen bestimmen.

Beispiel 1.2. Bestimmen Sie die Konvergenzbereiche (d.h. die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die jeweilige Reihe konvergiert) der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n \cdot 4^n}$$

Beispiel 1.3. Unbestimmte Integral

Definition. Gilt für jedes x im Intervall $I : F'(x) = f(x)$, so bezeichnet man $F(x)$ als Stammfuktion oder unbestimmes Integral von f.

Mit $F(x)$ ist auch $F(x)+C$ eine Stammfunktion von $f(x)$, wobei C eine beliebige Konstante ist. Schreibweise

$$F(x) = \int f(x)dx + C.$$

Umkehrung: F und G seien Stammfunktionen von f auf I. $\Rightarrow$

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

und $F - G$ ist eine konstante Funktion. Also

Satz. *Je zwei Stammfunktionen F und G einer stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ unterschieden sich nur um eine Konstante.*

INTEGRATIONSREGELN:

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx \text{ für jede } A \in \mathbb{R}$$

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int F(ax+b)dx + C \text{ für jede } a \neq 0,$$

wo $F'(x) = f(x)$.

a) Berechnen Sie die unbestimmte Integrale in der Tabelle auf die Seite 3.

b) Berechnen Sie die folgende unbestimmte Integrale

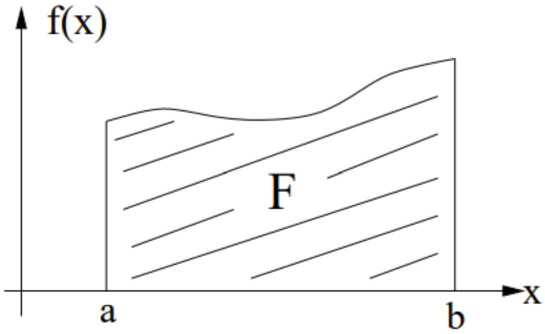
$$\int 5dx, \int e^{2x}dx, \int (\sin(-3x+5) + \cos(4x))dx, \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx,$$

$$\int (6x^2 + 8x + 3)dx, \int x(x+2)(x-1)dx, \int 4\sinh(2v)dv.$$

Beispiel 1.4. Bestimmte Integral

Die Idee: $f(x)$ ist stetig auf $[a, b]$.

Gesucht: Fläche $\int_a^b f(x)dx$, die zwischen $y = f(x)$ und der x-Ache liegt on $x = a$



bis $x = b$.

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Ist* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *und* $F :\to \mathbb{R}$ *eine beliebige Stammfunktion von* f*, so gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Berechnen Sie die folgende bestimmte Integrale

$$\int_{-1}^{3} x^4 dx, \int_0^{\pi/2} \sin x dx, \int_{\ln 2}^{\ln 3} \cosh x dx, \int_0^8 (\sqrt{2u} + \sqrt[3]{u}) du.$$

$\int x^a dx, a \neq -1$	
$\int \frac{1}{x} dx$	
$\int e^x dx$	
$\int \sin x dx$	
$\int \cos x dx$	
$\int \frac{1}{1+x^2} dx$	
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	
$\int \sinh x dx$	
$\int \cosh x dx$	
$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx$	
$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx$	
$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$	
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$	
$\int \frac{1}{1-x^2} dx$	