

Mathematik B (ET) Sommersemester 2021

10. Konversatorium 17.05.2021

Beispiel 10.1. Berechnen Sie die Divergenz und Rotation folgender Vektorfelder. Welche der Felder sind quellen- bzw. wirbelfrei?

$$\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy - 4y \end{pmatrix}; \vec{U}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz + 2x^2 \\ xz - 4z \\ xy - 4y - 2z^2 \end{pmatrix}; \vec{W}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz - 3x^2 \\ xz + 9z \\ xy - 4y + 3z^2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 10.2. Beweisen Sie die folgende Rechenregel in \mathbb{R}^3

$$\operatorname{div}(f \cdot \vec{V}) = \langle \operatorname{grad} f, \vec{V} \rangle + f \cdot \operatorname{div} \vec{V}.$$

Beispiel 10.3. Berechnen Sie das Integral der Funktion

$$f(x, y) = \frac{x^3}{(1 + x^2y)^2}$$

über das Rechteck $Q = [0, \sqrt{2}] \times [0, 1]$

Beispiel 10.4. Berechnen Sie das Integral

$$\iint_B e^{-x^2} dx dy,$$

wobei B das Dreieck mit den Eckpunkten $(1, 0)$, $(1, 2)$ und $(0, 2)$ bezeichnet.

Beispiel 10.5. Bestimmen Sie mit Hilfe der Variablentransformation

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}$$

den Wert des Integrals $\iint_B \frac{4x}{y} e^{xy} dx dy$, wobei B der von den Kurven $y = \frac{1}{2x}$, $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{x}{2}$ und $y = 2x$ berandete Bereich im ersten Quadranten (also $x, y > 0$) ist.

Beispiel 10.6. Ermitteln Sie die Jacobideterminante der Variablentransformation

$$x = r \cos(\varphi) \sin(\theta), \quad y = r \sin(\varphi) \sin(\theta), \quad z = r \cos(\theta)$$

in Kugelkoordinaten und verwenden Sie diese, um das Integral der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ über den Kugel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$$

zu berechnen.

Bemerkung:

$$T_x = \int \int \int_K (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) d(x, y, z),$$

$$T_y = \int \int \int_K (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) d(x, y, z),$$

$$T_z = \int \int \int_K (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) d(x, y, z),$$

sind Trägheitsmomente eines Körper mit Massendichte $\rho(x, y, z)$.