

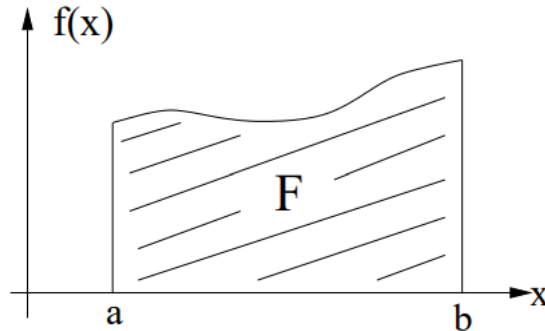
Mathematik B (ET) Sommersemester 2021

2. Konversatorium 08.03.2021

Bestimmte Integral

Die Idee: $f(x)$ ist stetig auf $[a, b]$.

Gesucht: Fläche $\int_a^b f(x)dx$, die zwischen $y = f(x)$ und der x-Ache liegt von $x = a$



bis $x = b$.

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $F : \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Stammfunktion von f , so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Beispiel 2.1. Berechnen Sie Ober- und Untersummen

(a) von $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ bezüglich der Zerlegung $Z = \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \pi\}$;

(b) von $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 4$ bezüglich der äquidistanten Zerlegung $Z_n = \{x_0, \dots, x_n\}$ von $[0, 1]$ für allgemeines n . Wie sind die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n, g)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n, g)$ der Ober- und Untersummen?

Vergleichen Sie das Ergebnis mit

$$\int_0^1 (-x^2 + 4) dx.$$

Beispiel 2.2. Berechnen Sie die folgende bestimmte Integrale

$$\int_{-1}^3 x^4 dx, \int_0^{\pi/2} \sin x dx, \int_{\ln 2}^{\ln 3} \cosh x dx, \int_0^8 (\sqrt{2u} + \sqrt[3]{u}) du.$$

Beispiel 2.3. Skizzieren f und berechnen Sie $\int_{-3}^3 f(x)d(x)$ und $\int_{-3}^3 |f(x)|d(x)$, wo

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{für } -3 \leq x \leq -1 \\ x^2 - 1, & \text{für } -1 < x \leq 1 \\ -x + 3, & \text{für } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

Warum ist f integrierbar?

Beispiel 2.4. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} |\sin(x)| dx$$

und vergleichen Sie das Ergebnis mit

$$\left| \int_{-2\pi}^{2\pi} \sin(x) dx \right|.$$