Mathematatik B (ET) Sommersemester 2021

4. Konversatorium 22.03.2021

Beispiel 4.1. Bestimmen Sie die folgenden Integrale durch quadratische Ergänzung des Polynoms unter der Wurzel.

(a) $\displaystyle\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}}$

Bemerkung: Für quadratische Ergänzung schreiben Sie das Polynom zunächst in die Form $(ax+b)^2+c$ oder $-(ax+b)^2+c$ um (mit Konstanten a, b, c) und substituieren dann $y = \frac{ax+b}{\sqrt{|c|}}$.

Beispiel 4.2. Berechnen Sie die folgende Integrale

(a) $\int \dfrac{5x^3+2x}{x^3-5x^2+4x}\,dx$

(b) $\int \dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,dx$

mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung.

Beispiel 4.3. Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$$

mit Hilfe der Substitution $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Beispiel 4.4. Welche Flächeninhalt F hat das durch folgende Ungleichungen beschriebene Gebiet?

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$
$$\tan x \le y \le \sin(2x).$$

<u>Bogenlänge einer Kurve</u>

- $$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Bogenlänge: $L = \int\limits_a^b \|x'(t)\|\,dx = \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}dt$

- Bogenlänge einer Kurve, die in Polarkoordinaten $(r(t), \varphi(t))$ ist

$$L = \int_a^b \|x'(t)\| \, dx = \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2\varphi'(t)^2} dt.$$

Umrechnung zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

und

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \text{ oder } \sin\varphi = \frac{y}{r} \text{ oder } \tan\varphi = \frac{y}{x}.$$

z.B,

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, x > 0, \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi, x < 0, y \geq 0, \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi, x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, x = 0, y < 0. \end{cases}$$

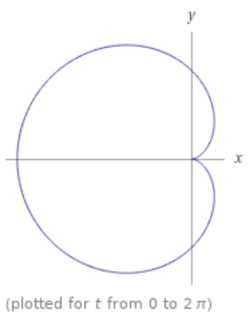
Beispiel 4.5. Berechnen Sie die Bogenlänge der Parabel

$$y = x^{\frac{3}{2}}$$

zwischen $x = 0$ und $x = 4$.

Beispiel 4.6. Berechnen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten die Bogenlänge der ganze Kardioide (Herzkurve) $(a > 0)$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2a(1-\cos t)\cos t \\ 2a(1-\cos t)\sin t \end{pmatrix},$$



Beispiel 4.7. Bestimmen Sie die Bogenlänge $s(t)$ der Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t\sin(t) \\ \\ -\frac{4\sqrt{2}}{3}t^{3/2} \\ \\ 2t\cos(t) \end{pmatrix}, \qquad t \geq 0.$$

Stellen Sie danach t in Abhängigkeit von s dar und ermitteln Sie so die natürliche Parametrisierung der Kurve.