Mathematik B (ET) Sommersemester 2021

6. Konversatorium 19.04.2021

Beispiel 6.1. Überprüfen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Vergleichskriteriums auf Konvergenz.

$$\int_0^\infty \frac{1}{\cosh(x^2)}\,dx, \qquad \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^3}\,dx, \qquad \int_2^\infty \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}\,dx.$$

Beispiel 6.2. Berechnen Sie die folgenden Integrale, falls sie konvergent sind. Zeigen Sie anderenfalls deren Divergenz

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^3-5x^2}\,dx, \qquad \int_0^\infty \sin x\,dx.$$

Beispiel 6.3. Untersuchen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Integralkriteriums die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n+\frac{1}{2}}{e^n}$$

auf Konvergenz. Hierfür muss auch überprüft werden, dass der Satz angewendet werden darf!

Welche Bedingung im Cauchyschen Integralkriterium ist für die Reihe

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{n+\frac{1}{2}}{e^n}$$

nicht erfüllt? Wie kann man dennoch die Konvergenz dieser Reihe mit Hilfe des Cauchyschen Integralkriteriums untersuchen?

Beispiel 6.4. Man betrachte für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ die Integrale

$$V = \pi \int_1^\infty (f(x))^2\,dx, \qquad F = 2\pi \int_1^\infty f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Berechnen Sie die Werte von V und F, falls sie konvergieren, anderenfalls zeigen Sie deren Divergenz.

Hinweis: Divergenz kann man auch zeigen, ohne eine explizite Stammfunktion zu berechnen.

Bemerkung: Lässt man den Graph von f für $x \geq 1$ um die x-Achse rotieren, dann ist V das eingeschlossene Volumen und F der Oberflächeninhalt.

Beispiel 6.5. Zeigen Sie Konvergenz des Eulersche Betafunktion

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

$p, q > 0$

Bemerkung (zum Information): Das Hauptresultat der Theorie der Betafunktion ist die Identität

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$