Mathematik B (ET) Sommersemester 2021

10. Übungsblatt (10.6.2020)

Beispiel 10.1. Berechnen Sie das Kurvenintegral **(2 Pkt.)**

$$\int_K \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2},$$

wo $K : \vec{x}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), 0 \leq t \leq 2\pi$ ist.

Welche Länge hat das Kurvenstück?

Beispiel 10.2. Berechnen Sie das Kurvenintegral **(2 Pkt.)**

$$\oint_K \sqrt{2y^2 + z^2}ds,$$

wo K der Kreis $\{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x = y\}$ ist.

Beispiel 10.3. Berechnen Sie das Kurvenintegral **(2 Pkt.)**

$$\oint_C \left\langle \begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}, \vec{n} \right\rangle ds,$$

wobei C den Rand des Dreieck mit Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$ (durchlaufen in dieser Reihenfolge) bezeichnet

- direkt anhand der Definition von Kurvenintegralen,
- mit Hilfe des Satzes von Gauß.

Beispiel 10.4. Gegeben ist die Funktion **(3 Pkt.)**

$$g(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4.$$

Mit C bezeichnen wir den Kreis vom Radius 1 um den Nullpunkt, durchlaufen in der Standardparametrisierung $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}$ von g in einem allgemeinen Punkt auf C, wobei $\vec{n}$ der nach außen gerichtete Normalvektor von C ist. Zeigen Sie anschließend

- direkt anhand der Definition von Kurvenintegralen,
- mit Hilfe der Greenschen Formeln (mit $f(x, y) = 1$),

dass

$$\oint_C \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} ds = 0.$$

Beispiel 10.5. Bestimmen Sie mit der Eulerschen Polygonzugmethode und der Schrittweite $\Delta x = 0.1$ eine Näherungslösung zum Anfangswertproblem **(2 Pkt.)**

$$y' = y + 1 \qquad y(0) = 0$$

auf Intervall $[0, 1]$.

Ermitteln Sie die Lösung des Anfangswertproblems und vergleichen Sie die Ergebnisse im Punkte $x = 0.5$ und $x = 1$.

Beispiel 10.6. Ermitteln Sie die Lösung des Anfangswertproblems **(2 Pkt.)**

$$y' \tan y = x(\cos y)^2, \qquad y(0) = \frac{2\pi}{3}.$$

Beispiel 10.7. Lösen Sie das Anfangswertproblem **(3 Pkt.)**

$$y' = x^3y^2 - 3\frac{y}{x}, \qquad y(1) = -\frac{1}{2}$$

für $x > 0$ mit Hilfe der Substitution $z(x) = x^3y(x)$.