

Mathematik B (ET) Sommersemester 2021

11. Übungsblatt (17.6.2021)

Beispiel 11.1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösungen der Differentialgleichungen (3 Pkt.)

$$y' \cos(x) - y \sin(x) = 4x \quad \text{und} \quad y' \cos(x) - y \sin(x) = \sin(x),$$

jeweils mit $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Beispiel 11.2. Ermitteln Sie alle Lösungen der Bernoullischen Differentialgleichung (3 Pkt.)

$$xy' - 4y = x^2y^3$$

für $x > 0$. Bestimmen Sie anschließend

- den Definitionsbereich der allgemeinen Lösung,
- diejenigen Lösungen mit $y(1) = 1$, $y(1) = 0$ und $y(1) = -\frac{1}{2}$.

Beispiel 11.3. Ermitteln Sie für die Riccatische Differentialgleichung (3 Pkt.)

$$y' = -(x+1)y^2 - y - \frac{x-3}{4x^2}$$

eine Lösung und formen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe dieser Lösung in eine Bernoullische Differentialgleichung um.

Hinweis: Standardansätze sind $y = \alpha x^\beta$, $y = \alpha e^{\beta x}$ oder $y = \alpha_1 x^{\beta_1} + \alpha_2 x^{\beta_2}$.

Beispiel 11.4. Stellen Sie fest ob die Differentialgleichung (2 Pkt.)

$$2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} + (x^2 + y^2)y' = 0$$

exakt ist. Falls ja, lösen Sie sie. Ansonsten bestimmen Sie zunächst einen integrierenden Faktor und lösen danach die erhaltene exakte Differentialgleichung.

Beispiel 11.5. Setzen Sie in der Differentialgleichung (2 Pkt.)

$$x^3y''' + 3x^2y'' - 6xy' + 6y = 0$$

den Ansatz $y(x) = x^a$ (mit $a \in \mathbb{R}$ konstant) ein und ermitteln Sie, für welche Werte von a die Differentialgleichung erfüllt ist. Prüfen Sie anschließend, ob die so erhaltenen Funktionen ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung bilden.

Beispiel 11.6. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3 Pkt.)

$$y'' - 2y' + y = \sin x + \sinh x.$$

Beispiel 11.7. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3 Pkt.)

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x + 5$$