

Mathematik B (ET) Sommersemester 2021

3. Übungsblatt (25.3.2021)

Beispiel 3.1. Bestimmen Sie die folgenden Integrale durch quadratische Ergänzung des Polynoms unter der Wurzel.

(a) $\int \frac{2}{\sqrt{2+3x-2x^2}} dx$ (2 Pkt.)

(b) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}} dx$ (3 Pkt.)

Bemerkung: Für quadratische Ergänzung schreiben Sie das Polynom zunächst in die Form $(ax+b)^2+c$ oder $-(ax+b)^2+c$ um (mit Konstanten a, b, c) und substituieren dann $y = \frac{ax+b}{\sqrt{|c|}}$.

Beispiel 3.2. Berechnen Sie das Integral (3 Pkt.)

$$\int \frac{x^3 - x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$$

mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung.

Beispiel 3.3. Berechnen Sie das Integral (2 Pkt.)

$$\int \frac{\sin^2 x + \sin x}{\cos^2 x + \cos x} dx$$

mit Hilfe der Substitution $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Beispiel 3.4. Welche Flächeninhalt F hat das durch folgende Ungleichungen beschriebene Gebiet? (2 Pkt.)

$$\begin{aligned} y &\geq x^2, \\ y &\leq x. \end{aligned}$$

Beispiel 3.5. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve (3 Pkt.)

$$h(x) = \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

zwischen $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{3}$.

Beispiel 3.6. Berechnen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten die Bogenlänge der logarithmischen Spirale (2 Pkt.)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \end{pmatrix}$$

im Intervall $[0, T]$ für allgemeines $T > 0$.

Beispiel 3.7. Bestimmen Sie die Bogenlänge $s(t)$ der Kurve (3 Pkt.)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \frac{8}{3}t^{3/2} \\ 4t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Stellen Sie danach t in Abhängigkeit von s dar und ermitteln Sie so die natürliche Parametrisierung der Kurve.