

Mathematik B (ET) Sommersemester 2021

4. Übungsblatt (15.4.2021)

Beispiel 4.1. Berechnen Sie die Koeffizienten α_0 , α_1 und α_2 gegeben durch

(3 Pkt.)

$$\alpha_i := \int_0^4 \left(\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^4 \frac{s-k}{i-k} \right) ds.$$

Setzen Sie die erhaltenen Werte (sowie $\alpha_3 = \alpha_1$ und $\alpha_4 = \alpha_0$, was aus Symmetriegründen gilt) anschließend in den Ausdruck

$$\frac{b-a}{4} \sum_{i=0}^4 \alpha_i f(x_i)$$

ein und vergleichen Sie ihn mit der Näherung

$$\frac{b-a}{90} \left(7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4) \right)$$

aus der Milne-Regel. (Hierbei ist jeweils $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{4}$.)

Beispiel 4.2. Berechnen Sie die Näherungen des Integrals

(2 Pkt.)

$$\int_0^\pi \sin(x) dx.$$

durch

- Trapezregel, Simpsonregel und $\frac{3}{8}$ -Regel;
- $\frac{3}{8}$ -Regel angewendet auf die Intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ und $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

und vergleichen Sie diese Näherungen mit dem exakten Wert.

Beispiel 4.3.

Bestimmen Sie die Fourierreihe der Funktion $f : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

(3 Pkt.)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi < x \leq 0, \\ x & \text{für } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

An welchen Stellen x konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen die Funktion? Ist die Konvergenz sogar gleichmäßig?

Beispiel 4.4. Ermitteln Sie die Fourierreihe der Funktion $f(x) = |\sin(x)|$. An welchen Stellen x konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen $f(x)$? Ist die Konvergenz sogar gleichmäßig?

(3 Pkt.)

Hinweis. Die Formel

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} \left(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \right)$$

kann die Berechnung der nötigen Integrale deutlich vereinfachen. (Achtung: Im Skript steht eine falsche Formel für $\sin(\alpha) \cos(\beta)$!)

Beispiel 4.5. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie, falls sie konvergieren, ihren Wert.

(a) $\int_0^1 x^2 \ln(x) dx$ und $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$ (3 Pkt.)

(b) $\int_{\frac{3}{4}}^2 \frac{2}{\sqrt{2+3x-2x^2}} dx$ und $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ (3 Pkt.)

(c) $\int_0^\infty (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx$ und $\int_{-\infty}^0 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$ (3 Pkt.)

Hinweis. Für manche der Integranden haben wir auf früheren Übungsblättern bereits Stammfunktionen berechnet.