

# Mathematik B (ET) Sommersemester 2021

## 4. Übungsblatt (15.4.2021)

**Beispiel 4.1.** Berechnen Sie die Koeffizienten  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  gegeben durch

(3 Pkt.)

$$\alpha_i := \int_0^4 \left( \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^4 \frac{s-k}{i-k} \right) ds.$$

Setzen Sie die erhaltenen Werte (sowie  $\alpha_3 = \alpha_1$  und  $\alpha_4 = \alpha_0$ , was aus Symmetriegründen gilt) anschließend in den Ausdruck

$$\frac{b-a}{4} \sum_{i=0}^4 \alpha_i f(x_i)$$

ein und vergleichen Sie ihn mit der Näherung

$$\frac{b-a}{90} (7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4))$$

aus der Milne-Regel. (Hierbei ist jeweils  $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{4}$ .)

**Beispiel 4.2.** Berechnen Sie die Näherungen des Integrals

(2 Pkt.)

$$\int_0^\pi \sin(x) dx.$$

durch

- Trapezregel, Simpsonregel und  $\frac{3}{8}$ -Regel;
- $\frac{3}{8}$ -Regel angewendet auf die Intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$  und  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

und vergleichen Sie diese Näherungen mit dem exakten Wert.

**Beispiel 4.3.**

Bestimmen Sie die Fourierreihe der Funktion  $f : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

(3 Pkt.)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi < x \leq 0, \\ x & \text{für } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

An welchen Stellen  $x$  konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen die Funktion? Ist die Konvergenz sogar gleichmäßig?

**Beispiel 4.4.** Ermitteln Sie die Fourierreihe der Funktion  $f(x) = |\sin(x)|$ . An welchen Stellen  $x$  konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen  $f(x)$ ? Ist die Konvergenz sogar gleichmäßig?

(3 Pkt.)

*Hinweis.* Die Formel

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

kann die Berechnung der nötigen Integrale deutlich vereinfachen. (Achtung: Im Skript steht eine falsche Formel für  $\sin(\alpha) \cos(\beta)$ !)

**Beispiel 4.5.** Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie, falls sie konvergieren, ihren Wert.

(a)  $\int_0^1 x^2 \ln(x) dx$     und     $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$  (3 Pkt.)

(b)  $\int_{\frac{3}{4}}^2 \frac{2}{\sqrt{2+3x-2x^2}} dx$     und     $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$  (3 Pkt.)

(c)  $\int_0^\infty (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx$     und     $\int_{-\infty}^0 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$  (3 Pkt.)

*Hinweis.* Für manche der Integranden haben wir auf früheren Übungsblättern bereits Stammfunktionen berechnet.