Mathematik B (ET) Sommersemester 2021

5. Übungsblatt (22.4.2021)

Beispiel 5.1. Überprüfen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Vergleichskriteriums auf Konvergenz. **(3 Pkt.)**

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx, \qquad \int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}\,dx, \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}\,dx.$$

Beispiel 5.2. Untersuchen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Integralkriteriums die Reihe **(3 Pkt.)**

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{e^{\frac{n}{3}}}$$

auf Konvergenz. Hierfür muss auch überprüft werden, dass der Satz angewendet werden darf!

Welche Bedingung im Cauchyschen Integralkriterium ist für die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{e^{\frac{n}{3}}}$$

nicht erfüllt? Wie kann man dennoch die Konvergenz dieser Reihe mit Hilfe des Cauchyschen Integralkriteriums untersuchen?

Beispiel 5.3. Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Integralkriteriums, dass die Reihe **(3 Pkt.)**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^{\alpha}}$$

für $0 < \alpha \leq 1$ divergiert und für $1 < \alpha$ konvergiert.

Beispiel 5.4. Berechnen Sie die folgenden Integrale, falls sie konvergent sind. Zeigen Sie anderenfalls deren Divergenz.

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot(x)\,dx$ **(1 Pkt.)**

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1}\,dx$ **(2 Pkt.)**

Beispiel 5.5. Untersuchen Sie die Integrale **(2 Pkt.)**

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$$

auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Wert des Integrals an.

Beispiel 5.6. Man betrachte für die Funktion $f(x) = e^{-x}$ die Integrale **(3 Pkt.)**

$$V = \pi \int_0^{\infty} (f(x))^2\,dx, \qquad F = 2\pi \int_0^{\infty} f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Berechnen Sie die Werte von V und F, falls sie konvergieren, anderenfalls zeigen Sie deren Divergenz.

Hinweis: $\int \sqrt{1+y^2}dy$ kann man mit Substitution $y = \sinh t$ lösen.

Bemerkung: Lässt man den Graph von f für e^{-x} um die x-Achse rotieren, dann ist V das eingeschlossene Volumen und F der Oberflächeninhalt.