Konversatorium Mathematik B (ET)
Sommersemester 2022

Schriftliche Lösungen dieser Beispiele können bis zum 30.06.2022 um 24:00 Uhr über das TeachCenter abgegeben werden.
Bei mindestens 6 vollständig berechneten und abgegebenen Beispielen wird ein Zeugnis mit der Bewertung "mit Erfolg teilgenommen" ausgestellt.

Übung 1. Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{2x+1}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}\,dx\,.$$

Antwort: $-\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$

Übung 2. Untersuchen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$$

auf Konvergenz.

Übung 3. Wir definieren die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \min(x, 1)$$

auf $[0, 2)$ und setzen die Funktion 2-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fort.

(a) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

(b) Entwickeln Sie $f(x)$ als Fourierreihe.

Antwort: $\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x) - \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right)$

Übung 4. Untersuchen Sie, an welchen Stellen die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{x^3-3x^2y^2+5y^3}{\sqrt{5x^4+y^4}} & \text{sonst} \end{cases}$$

stetig ist.
Hinweis: In $(0,0)$ verwenden Sie Polarkoordinaten.

Übung 5. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit stetigen partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung. Seien $x = 2r - s$ und $y = r + 2s$. Stellen Sie $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ durch die partiellen Ableitungen von f nach r und s dar.
Antwort: $\dfrac{1}{25}\left(2\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial r \partial s} - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)$

Übung 6. Ermitteln Sie alle lokalen und globalen Maxima und Minima von

$$f(x, y) = 8x^2 - 2y$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.
Antwort: globales Maximum $= 8.125$ in den Punkten $(\pm\frac{3\sqrt{7}}{8}, -\frac{1}{8})$, globales Minimum $= -2$ im Punkt $(0, 1)$, lokales Minimum $= 2$ im Punkt $(0, -1)$

Übung 7. Bestimmen Sie mit Hilfe der Variablentransformation $x + y = u$, $y = uv$ den Wert des Integrals

$$\iint_B e^{\frac{y}{x+y}}\, dxdy,$$

wobei B der durch $0 \le x \le 1$ und $0 \le y \le 1 - x$ definierte Bereich ist.
Hinweis: Bestimmen Sie die Grenzen für $v = \dfrac{y}{x+y}$ in Abhängigkeit von $u = x + y$ und berechnen Sie das Integral in der Reihenfolge $\int_{u=a}^{b} \int_{v=\cdots}^{\cdots} \cdots\, dvdu$.
Antwort: $\dfrac{e-1}{2}$

Übung 8. Verwenden Sie Kugelkoordinaten, um das Volumen V des von der Fläche

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 8z$$

begrenzten Körpers zu berechnen.
Antwort: $\dfrac{8}{3}\pi$

Übung 9. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}.$$

Antwort: $y(x) = e^{3x}(c_1 + c_2 x - \ln|x|)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Übung 10. Ermitteln Sie diejenige Lösung des Systems

$$\vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}(x),$$

welche die Bedingung

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt.
Antwort: $\vec{y}(x) = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - xe^x \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$