

Konversatorium Mathematik B (ET)

Sommersemester 2022

12. Übungsblatt (13.06.2022)

Übung 12.1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2y - x + 5}{2x - y - 4}.$$

Hinweis: Finden Sie zunächst Konstanten a und b , sodass man mit Hilfe der Substitution $x = X - a$, $y = Y - b$ die DGL

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2Y - X}{2X - Y}$$

erhält. Stellen Sie dann die DGL in der Form $\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{Y}{X}\right)$ dar und verwenden Sie die Substitution $Z(X) = \frac{Y(X)}{X}$.

Antwort: $|y - x + 3| = c|y + x + 1|^3$, $c \in \mathbb{R}$ und die spezielle Lösung $y(x) = -x - 1$.

Übung 12.2. Stellen Sie fest ob die Differentialgleichung

$$2y^3 - \frac{3 + 4x}{y} + \left(2xy^2 + \frac{x + x^2}{y^2}\right) y' = 0$$

exakt ist. Falls ja, lösen Sie sie. Ansonsten bestimmen Sie zunächst einen integrierenden Faktor und lösen danach die erhaltene exakte Differentialgleichung.

Antwort: $\frac{2}{3}x^3y^3 - \frac{x^3 + x^4}{y} = c$

Übung 12.3. Setzen Sie in der Differentialgleichung

$$x^3y''' + 3x^2y'' - 6xy' + 6y = 0$$

den Ansatz $y(x) = x^a$ (mit $a \in \mathbb{R}$ konstant) ein und ermitteln Sie, für welche Werte von a die Differentialgleichung erfüllt ist. Prüfen Sie anschließend, ob die so erhaltenen Funktionen ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung bilden.

Antwort: $\{x, x^2, x^{-3}\}$ bilden ein Fundamentalsystem