

Konversatorium Mathematik B (ET)

Sommersemester 2022

5. Übungsblatt (04.04.2022)

Übung 5.1. Überprüfen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz.

(a) $\int_0^{\infty} \sin x \, dx$ und $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$.

(b) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|x^2 - 5x + 6|}} \, dx$.

Übung 5.2. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie, falls sie konvergieren, ihren Wert.

(a) $\int_0^1 \ln(x) \, dx$.

(b) $\int_2^{\infty} \frac{5x + 5}{x^3 + x^2 - 2} \, dx$ und $\int_2^{\infty} \frac{x^2 + 7x + 7}{x^3 + x^2 - 2} \, dx$.

Übung 5.3. Man betrachte für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ die Integrale

$$V = \pi \int_1^{\infty} (f(x))^2 \, dx, \quad F = 2\pi \int_1^{\infty} f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

Berechnen Sie die Werte von V und F , falls sie konvergieren, anderenfalls zeigen Sie deren Divergenz.

Bemerkung: Lässt man den Graph von f für $x \geq 1$ um die x -Achse rotieren, dann ist V das eingeschlossene Volumen und F der Oberflächeninhalt.

Übung 5.4. Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Integralkriteriums, dass die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$$

für $0 < \alpha \leq 1$ divergiert und für $1 < \alpha$ konvergiert.