Mathematik B (ET) Sommersemester 2022

0. Übungsblatt - Lösung (03.03.2022)

Beispiel 0.1. Berechnen Sie die Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin(x)}{e^{(x^2)} - \cos(x)}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh(2x) - x\sinh(2x) - 1}{e^x - 1 + \ln(1-x)}$,

indem Sie in Zähler und Nenner jeweils die ersten Summanden der Taylorreihen bestimmen.

Lösung.

(a) Die ersten Summanden der Taylorreihen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \cdots \quad \text{und} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \cdots .$$

Außerdem hat wegen $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$ die Taylorreihe von $e^{(x2)}$ die ersten Summanden

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \cdots .$$

Insgesamt haben Zähler und Nenner also folgende Talyorreihen.

$$x^2\sin(x) = x^3 - \frac{x^5}{6} + \cdots \quad \text{und} \quad e^{(x^2)} - \cos(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{24}x^4 + \cdots .$$

Daher ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(x)}{e^{(x^2)} - \cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - \frac{x^5}{6} + \cdots}{\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{24}x^4 + \cdots} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \cdots}{\frac{3}{2} + \frac{11}{24}x^2 + \cdots} = 0.$$

(b) Die Taylorreihen von $\cosh(x)$, $\sinh(x)$, e^x und $\ln(1+x)$ sind bekannt und beginnen mit

$$\begin{aligned}
\cosh(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \cdots , \\
\sinh(x) &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots , \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots , \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots .
\end{aligned}$$

In die Reihen von $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ müssen wir $2x$ statt x einsetzen, bei $\ln(1+x)$ ist es $-x$ statt x. Insgesamt ergibt sich für Zähler und Nenner

$$\begin{aligned}
&\cosh(2x) - x\sinh(2x) - 1 \\
&\qquad = \left(1 + 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^6}{45} + \cdots\right) - x\left(2x + \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + \cdots\right) - 1 \\
&\qquad = -\frac{2x^4}{3} - \frac{8x^6}{45} - \cdots ,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&e^x - 1 + \ln(1-x) = \\
&\quad \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots\right) - 1 + \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots\right) \\
&\quad = -\frac{x^3}{6} - \frac{5x^4}{24} - \cdots .
\end{aligned}
$$

Eingesetzt in den Grenzwert haben wir

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(2x) - x\sinh(2x) - 1}{e^x - 1 + \ln(1-x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^4 - \frac{8}{45}x^6 - \cdots}{-\frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{24}x^4 - \cdots} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x - \frac{8}{45}x^3 - \cdots}{-\frac{1}{6} - \frac{5}{24}x - \cdots} = 0.
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Das Zusammenfassen der einzelnen Taylorreihen und das Kürzen von x ist erlaubt, weil sich dadurch die jeweiligen Konvergenzradien nicht ändern. Alle Taylorreihen in diesem Beispiel haben positive Konvergenzradien. (Die Reihe vom Logarithmus hat Konvergenzradius 1, alle anderen Reihen sind auf ganz $\mathbb{R}$ konvergent.) Weil wir $x \to 0$ betrachten, befinden wir uns innerhalb der Konvergenzbereiche und dürfen die Rechnungen an den Reihen vornehmen.

Beispiel 0.2. Bestimmen Sie die Konvergenzbereiche (d.h. die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die jeweilige Reihe konvergiert) der folgenden Potenzreihen.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n}}{n^2}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)x^n}$.

Lösung. Die allgemeine Darstellung einer Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 lautet $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Deren Konvergenzradien können berechnet werden durch

(E) (Euler) $R = \dfrac{1}{L}$, wobei $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$,

(C-H) (Cauchy-Hadamard) $R = \dfrac{1}{q}$, wobei $q = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. In diesem Zusammenhang setzt man $1/0 := \infty$ und $1/\infty := 0$.

(a) Wir betrachten die ersten beiden Reihen

$$
\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, b_n = 1.
$$

Wir erhalten von **(C-H)**

$$
q = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n \cdot 2^n}\right|} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \cdot 2^n}} = \frac{1}{2},
$$

wobei wir $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ benutzten. Die erste Potenzreihe hat daher den Konvergenzradius $R_1 = 2$. Die Randpunkte $x = -2$ und $x = 2$ in die Reihe eingesetzt ergeben

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},
$$

sodass die alternierende Reihe konvergiert, nach dem Leibniz-Kriterium und die andere divergiert (harmonische Reihe). Insgesamt erhalten wir das Konvergenzintervall $[-2, 2)$. Die zweite Reihe ist eine geometrische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$, und diese Reihe konvergiert für $-1 < x < 1$. Anwenden von **(C-H)** ergibt weiter

$$q = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1.$$

Dies ergibt den Konvergenzradius der zweiten Reihe $R_2 = 1$. Für die Randpunkte $x = -1$ und $x = 1$ ist $(c_n) = (1)$ und $(d_n) = (-1)$ keine Nullfolge und deshalb divergiert die Reihe. Daher lautet der Konvergenzbereich $(-1, 1)$.

(b) Hier haben beide Reihen nicht die Darstellung einer Potenzreihe, daher substituieren wir bei der ersten Reihe $y = (x+3)^2$ und erhalten eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}$. Anwendung von **(E)** liefert

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1,$$

was uns den Konvergenzradius $R = 1$ liefert. Da nach unserer Substitution negative Werte von y nicht möglich, und für $y = 1$ die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, dann ist nur der Bereich $y \in [0, 1]$ möglich. Rücksubstitution führt zu den Lösungen $x = \sqrt{y} - 3$ oder $x = -\sqrt{y} - 3$, sodass sich $x \in [-3, -2]$ oder $x \in [-4, -3]$ ergibt, somit insgesamt $x \in [-4, -2]$.

Für die zweite Reihe substituieren wir $y = \frac{1}{x}$ und wenden erneut **(E)** an

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1,$$

sodass wir den Konvergenzradius $R = 1$ erhalten. Da $y = \frac{1}{x}$ den Wert 0 nicht annimmt, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$ und wir den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ haben, ergibt sich somit der Konvergenzbereich $y \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Rücksubstitution liefert den Konvergenzbereich der gesuchten Potenzreihe $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.