

# Mathematik B (ET) Sommersemester 2022

10. Übungsblatt (02.06.2022)

**Beispiel 10.1.** Sei  $B$  der durch  $0 \leq x, 0 \leq y \leq x^2, x^2 + y^2 \leq 2$  definierte Bereich und sei  $f(x, y) = xy$ . (3 Pkt.)

(a) Zeichnen Sie den Bereich  $B$  in der  $xy$ -Ebene.

(b) Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\iint_B f(x, y) dB$$

in zwei Integrationsreihenfolgen: als  $\iint_B f(x, y) dx dy$  und als  $\iint_B f(x, y) dy dx$ .

Bemerkung: Eine der Integrationsreihenfolgen erfordert die Aufspaltung von  $B$  in zwei Gebiete.

Antwort:  $\frac{5}{24}$

**Beispiel 10.2.** Sei  $A$  der durch die Geraden  $x + y = 1$ ,  $x + y = 3$ ,  $y = 5x$  und  $y = 10x$  begrenzte Bereich. (3 Pkt.)

(a) Zeichnen Sie den Bereich  $A$  in der  $xy$ -Ebene.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Variablentransformation

$$u = x + y, \quad v = \frac{y}{x}$$

den Wert des Doppelintegrals

$$\iint_A (x + y) dx dy.$$

Hinweis: Drücken Sie zuerst  $x$  und  $y$  in Abhängigkeit von  $u, v$  aus.

Antwort:  $\frac{65}{99}$

**Beispiel 10.3.** Berechnen Sie das Doppelintegral (3 Pkt.)

$$\iint_D \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 dx dy,$$

wobei  $a, b > 0$  und

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die verallgemeinerten Polarkoordinaten:  $x = ar \cos \varphi$ ,  $y = br \sin \varphi$ .

Antwort:  $\frac{1}{3}ab\pi$

**Beispiel 10.4.** Berechnen Sie das Volumen des durch  $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ,  $z^2 \geq x^2 + y^2$  und  $z \geq 0$  definierten Körpers. Hinweis: Verwenden Sie im Dreifachintegral Kugelkoordinaten. (3 Pkt.)

Antwort:  $\frac{14}{3}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})\pi$

**Beispiel 10.5.** Sei  $K$  ein zylindrischer Körper mit der Höhe 3 (entlang der  $z$ -Achse ausgerichtet) und der Basis einer Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt  $(0, 0, 0)$  und dem Radius 2. Die Massendichte  $\rho(x, y, z)$  des Körpers sei durch das Quadrat des Abstands des Punktes  $(x, y, z)$  vom Punkt  $(0, 2, 0)$  gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe der Zylinderkoordinaten (4 Pkt.)

$$x = r \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\varphi), \quad z = z$$

- (a) die Masse  $m$  von  $K$  und
- (b) die  $y_S$ -Komponente des Massenmittelpunkts (Schwerpunkt)  $(x_S, y_S, z_S)$  von  $K$ .

Hinweise:  $m = \iiint_K \rho(x, y, z) dV$ ,  
 $(x_S, y_S, z_S) = \frac{1}{m} (\iiint_K x \rho(x, y, z) dV, \iiint_K y \rho(x, y, z) dV, \iiint_K z \rho(x, y, z) dV)$ .  
 Antwort:  $m = 108\pi$ ,  $y_S = -\frac{4}{9}$