

Mathematik B (ET) Sommersemester 2022

11. Übungsblatt (09.06.2022)

Beispiel 11.1. Berechnen Sie das Kurvenintegral

(3 Pkt.)

$$\int_C x \, ds,$$

wobei C die Zykloide $\vec{x}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$, ist.

Hinweis: Bei den Berechnungen kann man die Identität $1 - \cos t = 2 \sin^2(\frac{t}{2})$ verwenden.

Antwort: $\frac{16}{3}$

Beispiel 11.2. Berechnen Sie die Arbeit W der Kraft (Vektorfeld)

(3 Pkt.)

$$\vec{F}(x, y, z) = (x, y, x + y - 1).$$

entlang der Geraden zwischen dem Punkt $(1, 1, 1)$ und dem Punkt $(2, 3, 4)$.

Zu berechnen ist das Kurvenintegral

$$\int_C \vec{F} \, d\vec{s} := \int_a^b \langle \vec{F}(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \rangle dt.$$

Hinweis: Stellen Sie die Gerade in Parameterform dar: $\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$.

Antwort: 13

Beispiel 11.3. Gegeben ist die Funktion

(3 Pkt.)

$$g(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4.$$

Mit C bezeichnen wir den Kreis vom Radius 1 um den Nullpunkt, durchlaufen in der Standardparametrisierung $(\cos t, \sin t)$. Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}$ von g in einem allgemeinen Punkt auf C , wobei $\vec{n}$ der nach außen gerichtete Normalvektor von C ist. Zeigen Sie anschließend

(a) direkt anhand der Definition von Kurvenintegralen,

(b) mit Hilfe der Greenschen Formeln (mit $f(x, y) = 1$),

dass

$$\oint_C \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} \, ds = 0.$$

Beispiel 11.4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

(3 Pkt.)

$$\cos(x)y' - \sin(x)y = 4x, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Antwort: $y(x) = \frac{c + 2x^2}{\cos(x)}$

Beispiel 11.5. Lösen Sie das Anfangswertproblem

(3 Pkt.)

$$y' = x^3 y^2 - 3 \frac{y}{x}, \quad y(1) = -\frac{1}{2},$$

für $x > 0$, mit Hilfe der geeignete Standardsubstitution für eine Bernoullische DGL.

Antwort: $y(x) = -\frac{1}{x^3(x+1)}$

Beispiel 11.6. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung

(3 Pkt.)

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2,$$

wobei $y_1(x) = \frac{1}{x}$ eine spezielle (partikuläre) Lösung der DGL ist.

Antwort: $y(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{c - x^2}$